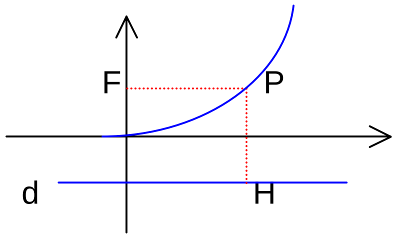
Parabola

Luogo geometrico dei punti del piano che sono equidistanti da un punto fisso F detto fuoco e da una retta fissa d detta direttrice.

Se $F(0,m)$ e $d: \quad y=-m$



da $\overline{PF}=\overline{PH}$ ricaviamo: $\sqrt{x^2+(y-m)^2}=|y+m|$ $\quad x^2+(y-m)^2=(y+m)^2 \quad y=\frac{1}{4m}x^2$

e, ponendo $\frac{1}{4m}=a$ otteniamo: $y=ax^2$ che è l'equazione canonica della parabola avente: $V(0,0); \quad F\left(0,\frac{1}{4a}\right); \quad d: y=-\frac{1}{4a}$ (**)

Dall'analisi della sua equazione possiamo dedurre che:

- la parabola è una curva simmetrica rispetto all'asse delle ordinate ($y(-x)=y(x)$);
- quando $a>0 \quad (y>0)$ la parabola ha la concavità rivolta verso l'alto, quando $a<0 \quad (y<0)$ la curva ha la concavità rivolta verso il basso.

Per dimostrare che $y=ax^2+bx+c$
è l'equazione di una parabola avente l'asse di simmetria parallelo all'asse y, operiamo come segue:

$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$ aggiungendo e togliendo $\frac{b^2}{4a^2}$ si ha:

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)$$

ovvero: $y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+a\left(-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a}+c$

osservando che $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ si ha: $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$

ossia $y-\frac{4ac-b^2}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ e, infine: $\boxed{y+\frac{b^2-4ac}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}$ (2)

Ricordando che le equazioni di una traslazione che porta l'origine O nel punto $O'(n;p)$

sono : $\begin{cases} x=X+n \\ y=Y+p \end{cases}$ (1)

se effettuiamo una traslazione di assi che porta l'origine O nel punto $O'\left(-\frac{b}{2a};-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

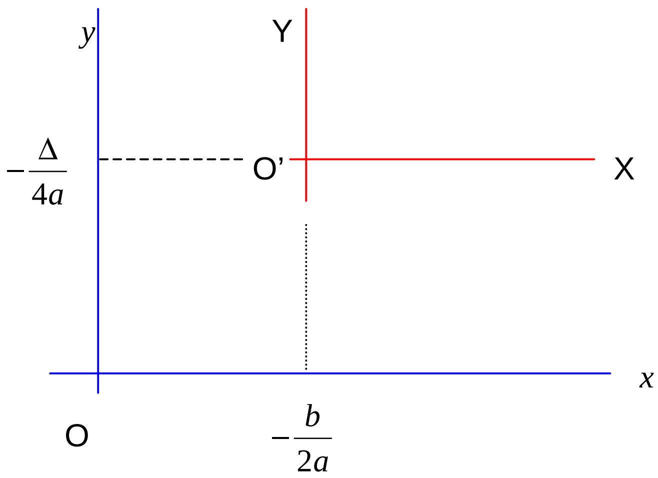
(vedi la figura seguente)

le (1) diventano $\begin{cases} x = X + \left(-\dfrac{b}{2a}\right) \\ y = Y + \left(-\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right) \end{cases}$ (1 bis)

Da esse ricaviamo: $\begin{cases} X = x + \dfrac{b}{2a} \\ Y = y + \dfrac{b^2-4ac}{4a} \end{cases}$

che sostituite nella (2) forniscono: $Y = aX^2$

che è l'equazione di una parabola riferita al sistema $O'XY$



Facendo riferimento alle equazioni della traslazione (1 bis)

e ricordando le (**) ricaviamo:

$$O'XY \begin{cases} V(0;0) \\ F\left(0;\dfrac{1}{4a}\right) \\ d: Y = -\dfrac{1}{4a} \end{cases} \Rightarrow Oxy \begin{cases} V\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right) \\ F\left(-\dfrac{b}{2a};\dfrac{1}{4a}-\dfrac{\Delta}{4a}\right) \\ d: y = -\dfrac{1}{4a}-\dfrac{\Delta}{4a} \end{cases}$$