Problemi sui fasci di parabole

- Determinare il luogo γ dei vertici del fascio di parabole $y = x^2 - 2(k+1)x + 3k + 1$ $(k \in$ **ß**$)$

Ricordando che il vertice di una parabola è $V\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ possiamo scrivere le equazioni parametriche di γ $\begin{cases} x = k + 1 \\ y = \dfrac{4(3k+1) - 4(k+1)^2}{4} \end{cases}$

Ed eliminando k otteniamo l'equazione $y = -x^2 + 3x - 2$

- Dato il fascio di parabole $y = (m-1)x^2 + mx + \frac{m+2}{4}$ $(m \neq 1)$ dimostrare che tutte le parabole passano per uno stesso punto A.

Consideriamo il sistema delle equazioni delle parabole del fascio che si ottengono rispettivamente per $m = 2$ *e* $m = 0$: $\begin{cases} y = x^2 + 2x + 1 \\ y = -x^2 + \dfrac{1}{2} \end{cases}$

e otteniamo la soluzione doppia $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

Le parabole sono quindi tra loro tangenti nel punto $A\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

$x = \frac{1}{2}$

- Scrivere l'equazione del fascio di parabole passanti per i punti $A(1;0)$ *e* $B(2;1)$ e determinare poi l'equazione della parabola avente come asse di simmetria $x = \frac{1}{2}$.

La generica parabola del fascio ha equazione $y = ax^2 + bx + c$. Poiché i punti A e B appartengono a tutte le parabole del fascio, consideriamo il sistema:

$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases}$ da cui ricaviamo: $\begin{cases} a = a \\ b = 1 - 3a \\ c = 2a - 1 \end{cases}$ quindi $F: y = ax^2 + (1-3a)x + 2a - 1$

per determinare la parabola del fascio avente l'asse $x = \frac{1}{2}$ poniamo $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$ e otteniamo:

$\frac{3a-1}{2a} = \frac{1}{2}$ che fornisce $a = \frac{1}{2}$ Quindi: $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$.