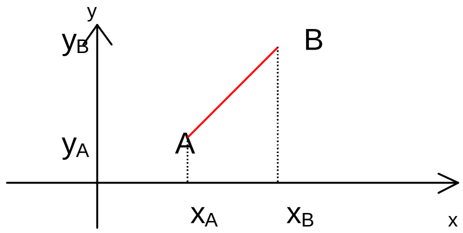
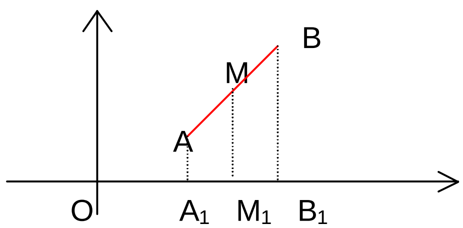
Distanza di due punti



Per determinare la distanza tra i punti $A(x_A;y_A)$ $B(x_B;y_B)$ applichiamo il teorema di Pitagora e otteniamo:

$$\boxed{\overline{AB}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}$$

Punto medio di un segmento

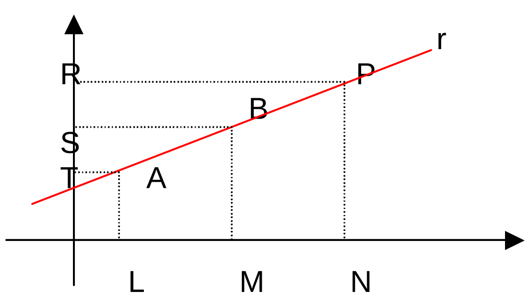


Osserviamo che: $x_M=\overline{OM_1}=\overline{OA_1}+\overline{A_1M_1}=x_A+\frac{x_B-x_A}{2}=\frac{x_A+x_B}{2}$

E in modo analogo si ha: $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$ Quindi: $\boxed{M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)}$ (**)

Equazione di una retta

Sulla retta r passante per I punti $A(x_A;y_A)$ $B(x_B;y_B)$ consideriamo il generico punto $P(x;y)$



Per il teorema di Talete possiamo scrivere: $MN:LM=BP:AB$ ed anche: $SR:TS=BP:AB$

E, uguagliando i primi membri: $\frac{x-x_B}{x_B-x_A}=\frac{y-y_B}{y_B-y_A}$ $\Rightarrow$ $\frac{x-x_B}{x_A-x_B}=\frac{y-y_B}{y_A-y_B}$ $\Rightarrow$ che è

l'equazione della retta passante per due punti.

Da questa otteniamo:

$(y_A - y_B)(x - x_B) + (x_B - x_A)(y - y_B) = 0$

Se poniamo $y_A - y_B = a$ e $x_B - x_A = b$ otteniamo: $ax + by - ax_B - by_B = 0$

Infine, posto $-ax_B - by_B = c$ si ha: $$\boxed{ax + by + c = 0 \quad (1)}$$

dalla (1) deduciamo che una retta è rappresentata da un'equazione lineare in due variabili E, viceversa,ogni equazione lineare in due variabili è rappresentata sul piano cartesiano da una retta.

Notiamo che un punto appartiene alla retta di equazione (1) se le sue coordinate soddisfano detta equazione, ovvero la rendono una identità.

Casi particolari

1. Se $a = 0;\quad b \neq 0;\quad c \neq 0$ si ha: $y = -\frac{c}{b}$ la retta è parallela all'asse x
2. Se $a \neq 0;\quad b = 0;\quad c \neq 0$ si ha: $x = -\frac{c}{a}$ la retta è parallela all'asse y
3. Se $a \neq 0;\quad b \neq 0;\quad c = 0$ si ha $ax + by = 0$ la retta passa per l'origine, infatti le coordinate di $O(0;0)$ soddisfano l'equazione della retta.
4. Se $a \neq 0;\quad b = 0;\quad c = 0$ si ha $x = 0$ che è l'equazione dell'asse y (tutti i suoi punti hanno infatti ascissa nulla)
5. $a = 0;\quad b \neq 0;\quad c = 0$ si ha $y = 0$ che è l'equazione dell'asse x (tutti i suoi punti hanno infatti ordinata nulla)

Equazione di una retta in forma esplicita

Dividiamo la (1) per $b \neq 0$ e otteniamo: $\frac{a}{b}x + y + \frac{c}{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}y$

Ponendo: $m = -\frac{a}{b}$ e $q = -\frac{c}{b}$ si ha $y = mx + q$ che è l'equazione richiesta.

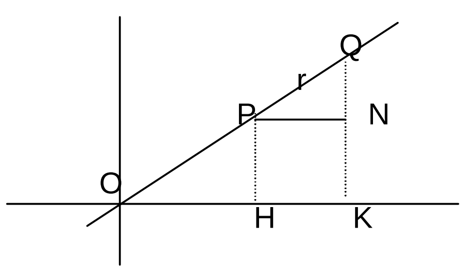
Il coefficiente m si chiama coefficiente angolare (indica infatti l'inclinazione della retta rispetto al semiasse positivo delle ascisse);

il numero q si chiama ordinata all'origine (indica quanto stacca la retta sull'asse y, infatti per $x = 0 \Rightarrow y = q$)

Dalla figura seguente possiamo osservare che se la retta passa per l'origine

$(q = 0)$ $y = m\,x$ quindi $m = \frac{y}{x}$ ed anche $m = \frac{\overline{QN}}{\overline{PN}} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$

quindi, il coefficiente angolare della retta passante per due punti dati si ottiene dal rapporto tra la differenza delle loro ordinate e la differenza delle loro ascisse.

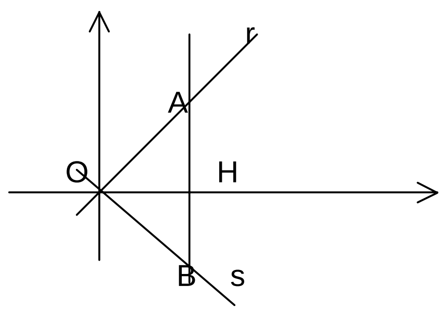


Osserviamo, infine, che se $\frac{y}{x}=m>0$ la retta giace nel primo e terzo quadrante (ascissa e ordinata sono concordi)

se $\frac{y}{x}=m<0$ la retta giace nel primo e terzo quadrante (ascissa e ordinata sono discordi).
In particolare, se $y=x \quad (m=1)$ la retta è la bisettrice del primo e terzo quadrante; se $y=-x \quad (m=-1)$ la retta è la bisettrice del secondo e quarto quadrante.

Condizione di parallelismo e di perpendicolarità tra due rette

Date le rette di equazione: $y=mx+q; \quad y=m'x+q'$
Esse risultano parallele quando hanno la stessa inclinazione rispetto al semiasse positivo delle ascisse. Poiché tale inclinazione è dettata dal coefficiente angolare, possiamo affermare che esse sono parallele se $m=m'$



rette perpendicolari

Per il secondo teorema di Euclide si ha: $AH:OH=OH:HB$ ed essendo $A(x_A;mx_A) \quad B(x_A;-m'x_A)$ si ha: $mx_A:x_A=x_A:(-m'x_A) \Rightarrow \quad mm'=-1$
Quindi, due rette sono perpendicolari quando il prodotto dei loro coefficienti angolari è uguale a -1, ovvero $m=-\frac{1}{m'}$.
Condizione di allineamento di tre punti
Per verificare se tre punti $P_1(x_1,y_1); \quad P_2(x_2,y_2); \quad P_3(x_3,y_3)$ sono allineati scriviamo l'equazione della retta $P_1P_2 \quad \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ e imponiamo l'appartenenza di P_3 a tale retta $\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}$ Se l'uguaglianza è un'identità i tre punti sono allineati.

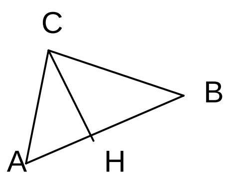
Retta passante per un punto e parallela ad una retta data
L'equazione del fascio di rette di centro $C(x_0;y_0)$ si ottiene considerando una combinazione lineare delle equazioni $x-x_0=0$ e $y-y_0=0$ ossia
$\lambda(x-x_0)+\mu(y-y_0)=0$
Se, in particolare, vogliamo l'equazione della retta del fascio che è parallela alla retta $s: \quad ax+by+c=0 \quad \left(m=-\frac{a}{b}\right)$ scriveremo: $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \Rightarrow \quad y-y_0=m(x-x_0)$

Distanza di un punto da una retta

Si dimostra che la distanza del punto $P(x_0, y_0)$ dalla retta $r: ax+by+c=0$ è data da:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Area di un triangolo del quale sono noti i vertici $A(x_A, y_A);\ B(x_B, y_B);\ C(x_C, y_C)$



Poiché la retta AB ha equazione $\frac{y-y_B}{y_A-y_B} = \frac{x-x_B}{x_A-x_B} \Rightarrow (y_A-y_B)x-(x_A-x_B)y+x_Ay_B-x_By_A=0$

La sua distanza dal vertice C è: $\overline{CH} = \frac{(y_A-y_B)x_C-(x_A-x_B)y_C+x_Ay_B-x_By_A}{\sqrt{(y_A-y_B)^2+(x_A-x_B)^2}}$ Per cui,

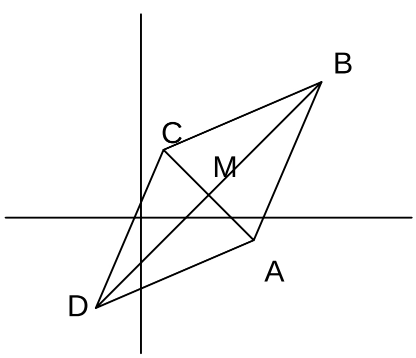
essendo $\overline{AB} = \sqrt{(y_A-y_B)^2+(x_A-x_B)^2}$, si ha:

$A = \frac{1}{2} b\, h = \ (y_A-y_B)x_C-(x_A-x_B)y_C+x_Ay_B-x_By_A$ che equivale a: $A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$

Esercizio

Del quadrilatero ABCD sono noti $C(1,3)$, $D(-2,-4)$ e $AC: x+y-4=0$. Determinare:

a) i punti A e B in modo che il quadrilatero sia un rombo;
b) l'area, l'apotema ed il perimetro del rombo.



- Essendo $m_{AC} = -1$, ricaviamo l'equazione della retta passante per D e perpendicolare ad AC $\qquad y-y_D = -\frac{1}{m}(x-x_D) \Rightarrow \quad y = x-2$

Determiniamo il punto M mediante il sistema: $\begin{cases} AC: & y=-x+4 \\ BD: & y=x-2 \end{cases} \Rightarrow M(3,1)$

Poiché le coppie di punti A,C e B,D devono essere simmetrici rispetto ad M , mediante le (**) ricaviamo:

$$\begin{cases} x_B = 2x_M - x_D \\ y_B = 2y_M - y_D \end{cases} \quad B(8,6) \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x_A = 2x_M - x_C \\ y_A = 2y_M - y_C \end{cases} \quad A(5,-1)$$

- $A = 2A_{ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 8 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 40$
- Poiché l'apotema a è la distanza di M dalla retta BC, ricaviamo l'equazione di tale retta: $BC: \ \frac{y-3}{6-3} = \frac{x-1}{8-1} \quad \Rightarrow \quad 3x - 7y + 18 = 0$ Allora $a = \frac{|3 \cdot 3 - 7 \cdot 1 + 18|}{\sqrt{3^2 + 7^2}} = \frac{10}{29}\sqrt{58}$
- $2p = 4\overline{BC} = 4\sqrt{(8-1)^2 + (6-3)^2} = 4\sqrt{58}$ oppure $2p = \frac{2A}{a} = \frac{2 \cdot 40}{20}\sqrt{58} = 4\sqrt{58}.$