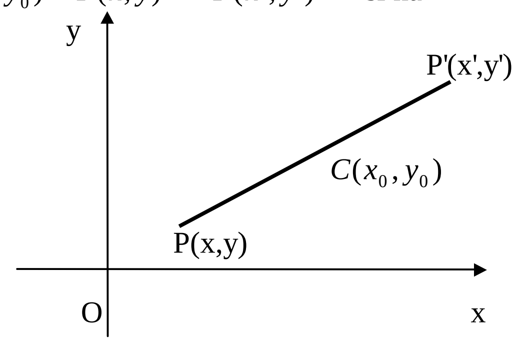
TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

Simmetria centrale o equinversione

Si dice simmetria centrale di centro C la trasformazione di $\mathbf{R}^2$ in se stesso che porta C in C e che ad ogni punto $P \in \mathbf{R}^2$ diverso da C, associa il punto $P' \in \mathbf{R}^2$ tale che C sia il punto medio del segmento PP'.
Se $C(x_0, y_0)$ $P(x, y)$ $P(x', y')$ si ha



$$\varphi : \begin{cases} \dfrac{x + x'}{2} = x_0 \\ \dfrac{y + y'}{2} = y_0 \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases} \qquad \det A = 1$$

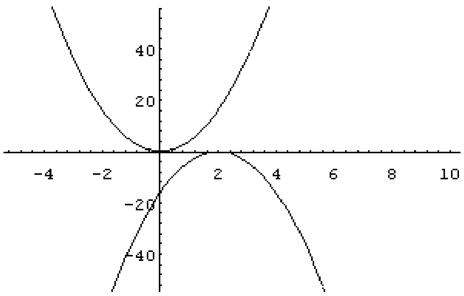
che rappresenta una simmetria centrale di centro C che è l'unico punto unito della trasformazione.

Se $x_0 = y_0 = 0$ si ottiene: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$ $\qquad \det A = 1$

Che sono le equazioni della **simmetria rispetto all'origine**.

Per verificare se due curve: $\Gamma : y = f(x)$ e $\Gamma' : y = f_1(x)$ possiedono un centro di simmetria $C(x_0, y_0)$ si pone nella equazione $y = f_1(x)$ al posto di x $(2x_0\text{-}x)$ ed al posto di y $(2y_0\text{-}y)$ e si uguaglia la funzione ottenuta alla f (x) data.
Successivamente , mediante il principio di identità dei polinomi si ricavano i valori dei coefficienti x_0 e y_0 che soddisfano il sistema.

Esempio



Determinare il centro di simmetria delle parabole

$\Gamma : y = 4x^2$

$\Gamma' : y = -4x^2 + 16x - 16$

Sostituendo nella prima si ha

$2y_0 - y = 4(2x_0 - x)^2$ e sviluppando, si ha

$y = -4x^2 + 16x_0 x - 16x_0^{\,2} + 2y_0$ che, confrontata con Γ' fornisce il sistema

$$\begin{cases} 16 = 16x_0 \\ -16x_0^{\,2} + 2y_0 = -16 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{matrix}$$

Le curve date hanno quindi come punto di simmetria P(1, 0).

Centro di simmetria di una curva

Per determinare il centro di simmetria della curva $\Gamma : y = \dfrac{4x+11}{x+2}$ operiamo nel seguente modo:

$$xy - 4x + 2y - 11 = 0 \qquad (\ 2\ )$$

$$(2h - x)(2k - y) - 4(2h - x) + 2(2k - y) - 11 = 0$$

$$4hk - 2hy - 2kx + xy - 8h + 4x + 4k - 2y - 11 = 0$$

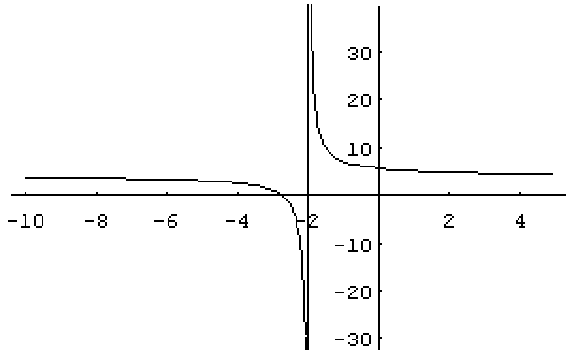
$$xy - (2k - 4)x + 2(-h - 1)y + 4hk - 8h + 4k - 11 = 0$$

che confrontata con la (2) fornisce

$2k - 4 = 4 \qquad k = 4$

$-2h - 2 = 2 \qquad h = -2$

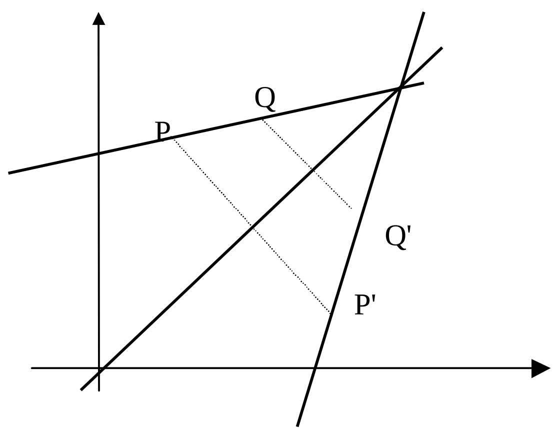
Il centro di simmetria sarà quindi il punto C (-2, 4).



Nota: - Per rendere più semplice lo studio di una curva, quando questa possiede un centro C di simmetria, si effettua una traslazione di assi che porta l'origine in C.

Simmetrie assiali

Definizione - Si chiama simmetria assiale ogni isometria che trasforma un punto P nel punto P' simmetrico di P rispetto ad una retta prefissata, detta asse di simmetria.

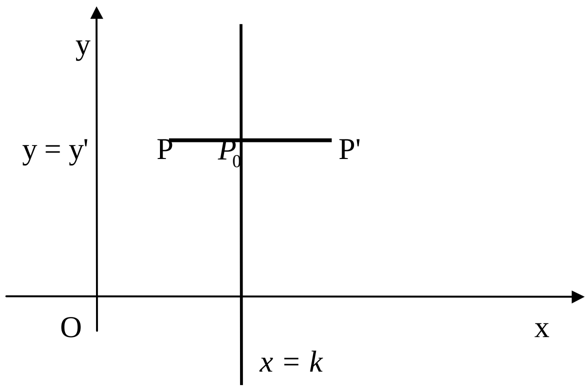


Ne segue che l'asse di simmetria è il luogo di punti uniti, inoltre punti corrispondenti sono equidistanti dall'asse.

Simmetria rispetto alla retta s di equazione x = k.

Sia s una retta parallela all'asse y e P'(x',y') il simmetrico di P(x,y) rispetto alla retta s

Osservando il grafico si ha:



essendo P_0 il punto medio di PP' si ha

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{x + x'}{2} \\ y = y' \end{cases} \qquad dove\ x_0 = k$$

e quindi

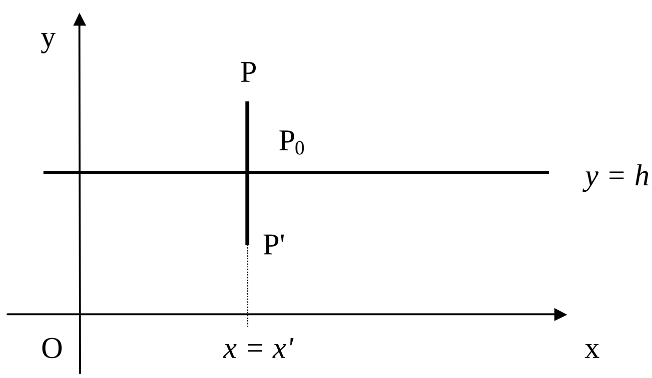
$$\begin{cases} x' = 2k - x \\ y' = y \end{cases} \qquad \det A = -1$$

Se k = 0 si ha la **simmetria rispetto all'asse y** di equazioini

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \qquad \det A = -1$$

Simmetria rispetto alla retta r di equazione y = h

Dal grafico si ha



$$\begin{cases} y_0 = \dfrac{y + y'}{2} \\ x' = x \end{cases} \qquad dove\ y_0 = h$$

e quindi

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2h - y \end{cases} \qquad \det A = -1$$

Se h = 0 si ha la **simmetria rispetto all'asse x** di equazioini

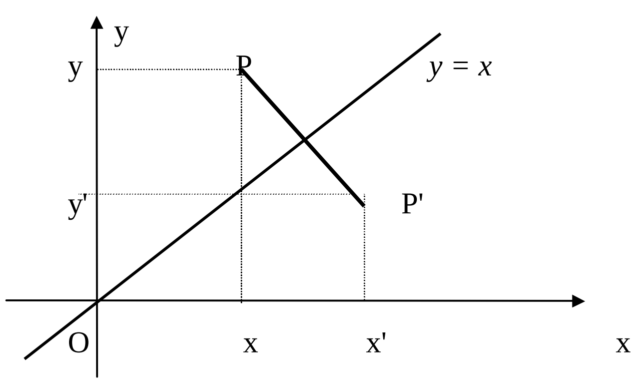
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \qquad \det A = -1$$

Simmetria rispetto alla bisettrice y = x

Si dice simmetria assiale di asse y = x l'isometria di equazione

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \qquad \det A = -1$$

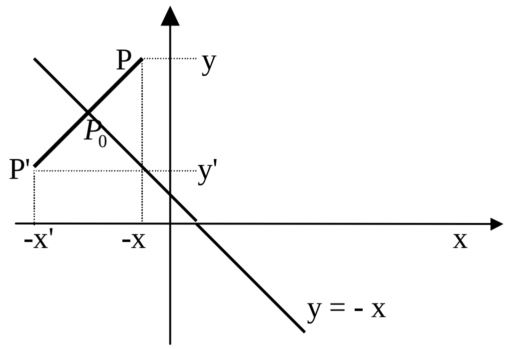
come è facile osservare dal grafico.



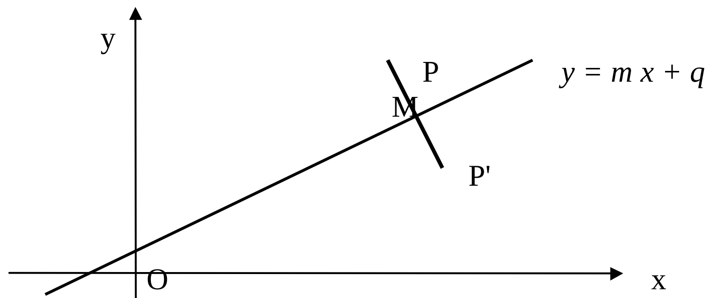
Simmetria rispetto alla bisettrice $y = -x$

Si dice simmetria assiale di asse la retta $y = -x$ l'isometria di equazione

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases} \qquad \det A = -1$$



Simmetria rispetto alla retta r: **y = m x + q**



osserviamo che due punti P(x, y) e P'(x',y') sono simmetrici rispetto alla retta r se si verificano le seguenti condizioni:

- il punto $M\left[\frac{1}{2}(x+x');\frac{1}{2}(y+y')\right] \in r$
- P e P' appartengono alla retta perpendicolare ad r.

Queste condizioni si traducono nelle equazioni:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(y+y') = m\cdot\frac{1}{2}(x+x') + q \\ \frac{y-y'}{x-x'} = -\frac{1}{m} \end{cases}$$

Risolvendo il sistema rispetto a x', y', si ottengono le equazioni della simmetria rispetto alla retta r.

$$x' = \frac{1-m^2}{1+m^2}x + \frac{2m}{1+m^2}y - \frac{2mq}{1+m^2}$$

$$y' = \frac{2m}{1+m^2}x + \frac{1-m^2}{1+m^2}y + \frac{2q}{1+m^2}$$

Come caso particolare si possono, da questa, ricavare le simmetrie rispetto alle bisettrici degli assi.

Esempio

Scrivere l'equazione della retta r' simmetrica rispetto alla retta s di equazione $x-y-1=0$, della retta r di equazione $3x-y=0$.
L'equazione della retta s si può anche scrivere nella forma $y=x-1$.
Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x+x')-\frac{1}{2}(y+y')-1=0 \\ \frac{y-y'}{x-x'}=-1 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} -x+y=x'-y'-2 \\ x+y=x'+y' \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1-1=-2 \qquad D_1=\begin{vmatrix} x'-y'-2 & 1 \\ x'+y' & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} -1 & x'-y'-2 \\ 1 & x'+y' \end{vmatrix}=-x'-y'\_x'+y'+2=-2x'+2$$

avremo quindi

$$\begin{cases} x=y'+1 \\ y=x'-1 \end{cases}$$

sostituendo nell'equazione della retta r otteniamo

$$3(y'+1)-x'+1=0$$

$$x'-3y'-4=0$$

e tornando alle coordinate correnti avremo:

$$x-3y-4=0.$$