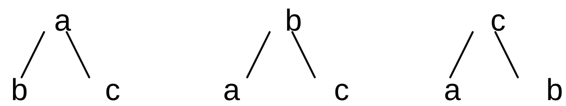
Calcolo combinatorio

Disposizioni semplici

Le disposizioni semplici di n elementi presi a k a k sono i possibili insiemi formati da k elementi che si possono costruire con gli n elementi assegnati e che differiscono tra loro per l'ordine degli elementi.
Ad esempio: costruire le disposizioni semplici degli elementi: a,b,c presi a due a due.



nell'esempio indicato si ha: $D_{3,2} = 3 \cdot 2 = 6$

Dimostriamo che Il numero delle disposizioni semplici è dato dal prodotto dei primi k numeri interi a partire da n. Ovvero

$$D_{n,k} = n\,(n-1)(n-2).....(n-k+1) \qquad (1)$$

Siano: $a_1, a_2, ...a_n$ gli n elementi assegnati.
Le disposizioni di classe 1 sono gli stessi elementi. Cioè:

$D_{n,1} = n$ (2)

Per ottenere le disposizioni di classe 2 aggiungiamo,successivamente, a ciascun gruppo di classe 1 gli (n-1) elementi rimanenti (vedi esempio sopra). E' facile dedurre che

$D_{n,2} = D_{n,1}\ (n-1)$ (3)

Per ottenere le disposizioni di classe 3 poniamo, successivamente, in ciascun gruppo di classe 2 gli (n-2) elementi rimanenti. Si ha quindi:

$D_{n,3} = D_{n,2}\ (n-2)$ (4)

………………………
………………………

Così continuando, per formare le disposizioni di classe k, poniamo, successivamente, in ciascun gruppo di classe (k-1) gli n-(k-1) elementi restanti. Per cui:

$D_{n,k} = D_{n,k-1}\ (n-k+1)$ (k)

Moltiplicando membro a membro le k uguaglianze si ottiene:

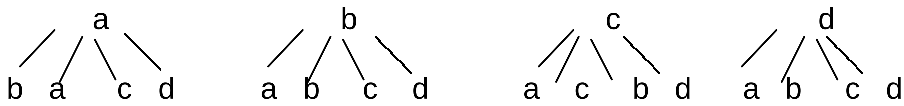
$$D_{n,1}\cdot D_{n,2}\cdot D_{n,3}\cdot.........\cdot D_{n,k} = n\cdot D_{n,1}\cdot(n-1)\cdot D_{n,2}\cdot \qquad \cdot(n-k+1)\cdot D_{n,k-1}$$

e semplificando si ha la (1).

Disposizioni con ripetizione

Le disposizioni con ripetizione di n elementi presi a k a k sono i possibili insiemi formati da k elementi che si possono costruire con gli n elementi assegnati e che possono presentare la ripetizione degli elementi assegnati.

Ad esempio: costruire le disposizioni con ripetizione degli elementi a, b, c, d presi a 2 a 2.



Il numero delle disposizioni con ripetizione è dato da: $D^{r}{}_{n.k} = n^{k}$

Nell'esempio si ha infatti: $D_{4,2}{}^{r} = 4^{2} = 16$

Permutazioni

Le permutazioni di n elementi distinti sono le disposizioni semplici degli elementi dati presi a n a n. Quindi, per quanto prima detto, è evidente che il numero delle permutazioni di n elementi è dato da:

$$P_n = D_{n,n} = n\,(n-1)(n-2).....3 \cdot 2 \cdot 1$$

A tale prodotto viene associato il nome di n fattoriale, ovvero: $P_n = n!$

In particolare, poniamo: $1! = 1$ $\qquad 0! = 1$

Combinazioni semplici

Le combinazioni semplici di n elementi distinti presi a k a k (o di classe k) sono i possibili gruppi di k elementi che si possono formare con gli n elementi dati e che possono essere distinti per almeno uno degli elementi che li compongono.
Ad esempio, le combinazioni semplici di classe 2 che si possono ottenere con gli elementi a, b, c sono: a,b a,c b,c.

Osserviamo infatti che le combinazioni b,a e a,b sono uguali perché presentano gli stessi elementi.
Poiché ogni combinazione semplice può generare tante disposizioni semplici quante sono le permutazioni dei suoi k elementi $(k!)$, possiamo scrivere:

$$D_{n,k} = C_{n,k} \cdot k!$$

Quindi si ricava: $$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!}. \qquad (5)$$

Es. stabilire quanti terni si possono fare in una cinquina. $C_{5,3} = \frac{D_{5,3}}{3!} = 10$.

Se i numeri sono: 1, 2, 3, 4, 5 i terni che si possono formare sono:
(1,2,3) (1,2,4) (1,2,5) (1,3,4) (1,3,5) (1,4,5) (2,3,4) (2,3,5) (2,4,5) (3,4,5).
Moltiplicando i termini della (1) per $(n-k)!$ $\quad con \quad n \neq k$ otteniamo

$$C_{n,k} = \frac{n(n-1) \quad (n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (6)$$

A quest'ultima frazione si dà il nome di coefficiente binomiale. Essa viene indicata con il simbolo $\binom{n}{k}$ e si legge "n sopra k".

Proprietà dei coefficienti binomiali

Casi particolari $\binom{n}{0}=1$ e $\binom{n}{n}=1$

Prima proprietà

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

infatti dalla (2), ponendo n-k in k, si ha: $\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot(n-(n-k))!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Quindi si ha: $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

Seconda proprietà

Se $1\le k\le n-1$ è valida l'uguaglianza $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$.

Infatti, ponendo nella (2) n-1 in n e k-1 in k, si ha:

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)}+\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)}=$$

ed essendo $k!=k(k-1)!$ $\qquad 5!=5\cdot 4!=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

potremo scrivere:

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)(n-k-1)!}+\frac{(n-1)!}{k(k-1)!(n-k-1)!}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)}\left(\frac{1}{n-k}+\frac{1}{k}\right)=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\cdot\frac{n}{k(n-k)}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}$$

Terza proprietà

$$\binom{n}{k+1}=\binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$$

Ponendo nella (2) k+1 in k si ha:

$$\binom{n}{k+1}=\frac{n(n-1)\qquad[n-(k+1)+1]}{(k+1)!}=\frac{n(n-1)\qquad(n-k+1)(n-k)}{(k+1)k!}=$$

$$=\frac{n-k}{k+1}=\binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}\frac{n(n-1)\qquad(n-k+1)}{k!}.$$

Binomio di Newton

Se $a, b \in \mathbb{R}$ ed $n \in \mathbb{N}_0$

si ha: $$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots\ldots\ldots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + b^n$$

e per uniformità di scrittura, ricordando che $\binom{n}{0} = 1$ e $\binom{n}{n} = 1$, possiamo scrivere:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots\ldots\ldots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n .$$

Osservazioni sulla formula

1. il numero degli elementi è n+1;
2. gli esponenti del numero a decrescono di una unità da n a 0, mentre gli esponenti del numero b aumentano di una unità da 0 ad n. E' quindi evidente che ogni addendo è di grado n e che il polinomio è omogeneo;
3. i coefficienti dei termini estremi e dei termini equidistanti dagli estremi sono uguali.

   Notiamo infatti che: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n}$ $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$ (vedi prima proprietà)

   Non è quindi necessario fare il calcolo di tutti i coefficienti. Più precisamente, se n è dispari ed il numero dei termini è pari basterà calcolare i primi $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ coefficienti.

   Se, invece, n è pari si calcoleranno solo $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ coefficienti.