PROBABILITA'

<u>Definizione classica</u> ***(dovuta a** Laplace**)***

Quando è possibile conoscere a priori il numero dei casi favorevoli f ed il numero dei casi possibili n, si definisce probabilità semplice (p) di un evento casuale E il rapporto tra il numero dei casi favorevoli (f) ed il numero dei casi possibili (n), ovvero

p = f/n

a condizione che tutti i casi abbiano la stessa probabilità di realizzarsi. E' facile osservare che il valore di p è sempre compreso **tra 0 ed 1**; vale 0 quando l'evento è **impossibile**, vale 1 quando l'evento è **certo**.

- **Es**. Da un'urna contenente 40 palline, di cui 30 bianche e 10 rosse, si estraggono due palline. Qual è la probabilità che esse siano entrambe rosse?
In questo caso n è rappresentato dal numero delle combinazioni che si possono fare con le 40 palline prese a 2a 2 $C_{40,2} = \frac{40 \cdot 39}{2\,!} = 780$

Il numero f è rappresentato da tutte le possibili coppie che si possono ottenere con le 10 palline rosse ().

Quindi $p = \frac{45}{780} = 0{,}05$

- Es. Qual è la probabilità che lanciando due dadi si ottenga il numero 8?
I casi possibili sono dati dagli accoppiamenti che si possono formare con due serie di numeri uguali da 1 a 6: (1,1); (1,2); (2,1),.. ossia dalle disposizioni con ripetizione di 6 numeri presi a 2 a 2 $n = D^{(r)}{}_{6,2} = 6^2 = 36$
I casi favorevoli sono le coppie (2,6);(6,2);(3,5);(5,3); (4,4).
Quindi p = 5/36.

La definizione classica presenta vari punti deboli. Innanzitutto si può applicare quando sono noti f ed n, inoltre prevede un ambiente ideale nel quale tutti gli eventi sono ugualmente possibili e non tiene quindi conto di tutti quei fattori che potrebbero influenzare il verificarsi o meno di un evento.

<u>Definizione frequentista</u>

Supponiamo che effettuando un numero m di lanci di una moneta l'evento "croce" si presenti r volte, chiamiamo **frequenza relativa f dell'evento** il rapporto **f = r/m**.

Frequenza e probabilità, pur sembrando simili, sono due concetti diversi; infatti, mentre la probabilità si calcola a priori, la frequenza si calcola a posteriori, ovvero dopo le prove.
L'esperienza ci dice che se il numero delle prove è sufficientemente elevato, la frequenza assume un valore prossimo a quello della probabilità Questa legge prende il nome di **legge empirica del caso o legge dei grandi numeri**.
Questa legge riveste una grande importanza perché permette:
a) di assumere la probabilità di un evento come previsione approssimata della frequenza con cui questo si presenterà in un numero elevato di prove.
b) di assumere la frequenza, calcolata in un grande numero di prove, come **misura approssimata della probabilità**, quando non si sappia calcolarla secondo la definizione.

Prima di introdurre i concetti di probabilità totale e probabilità composta è bene conoscere il significato di eventi incompatibili e di eventi indipendenti.
Si dice che due **eventi** E_1 *ed* E_2 sono **incompatibili o indipendenti** quando il verificarsi dell'uno esclude il verificarsi dell'altro, ossia che non possono verificarsi entrambi; ad esempio che esca un numero pari (E_1) ; esca un numero dispari (E_2) .
Diciamo che due **eventi** sono **compatibili o dipendenti** quando il verificarsi di uno non esclude il verificarsi dell'altro, estrazione da un mazzo di carte di un re (E_1) di colore rosso (E_2).

Definizione assiomatica

Le considerazioni fin qui fatte sono di carattere empirico e non risultano né univoche né rigorose. Per questo motivo è stata formulata una nuova definizione di probabilità, detta assiomatica, che fa uso della logica formale e della teoria degli insiemi.
Alla base di questa impostazione sta il concetto di spazio degli eventi. Dato un generico esperimento, consideriamo **l'insieme universo U** formato dagli eventi elementari E, possibili esiti dell'esperimento.
Per esempio, nel lancio di un dado, si ha U = {1,2,3,4,5,6}.
L'insieme delle parti P(U) che ha come elementi tutti i sottoinsiemi propri e impropri di U viene chiamato SPAZIO DEGLI EVENTI S.

Gli Assiomi

1°) Ad ogni elemento E dello spazio S si può associare un numero reale p(E) non negativo detto probabilità di E. $(0 \le p(E) \le 1)$

2°) Dati due o più elementi $E_1, E_2, ..., E_n$ dello stesso spazio S, disgiunti tra loro (indipendenti), si ha che:

$$p(E_1 \cup E_2 \cup ...... \cup E_n) = p(E_1) + p(E_2) + ... + p(E_n)$$

si dice che p(E) è una funzione additiva d'insieme.

3°) Se S è lo spazio degli eventi, si ha p(S)=1.

Osserviamo che $S \cup \varnothing = S$ e per il 2° assioma si ha: $p(S) = p(S) \cup p(\varnothing)$ da cui $p(\varnothing) = 0$

Teoremi sulla probabilità

Consideriamo l'evento E e il suo complementare E' rispetto ad S.
Si ha evidentemente $S = E \cup E'$, ed essendo $E \cap E' = 0$, per il 2° assioma segue che $p(S) = p(E) + p(E')$
Poiché il 3° assioma afferma che $p(S) = 1$ si ha

$$p(E) + p(E') = 1 \qquad (1)$$

La (1) rappresenta il **teorema della probabilità contraria** e può essere enunciato nel seguente modo:
La somma delle probabilità di un evento E e del suo contrario E' è uguale a 1.
Il teorema può anche essere dimostrato mediante la definizione classica. Infatti,

essendo $p(E) = \frac{n}{f}$ si ha: $p(E') = \frac{f-n}{f}$ ossia

$p(E') = 1 - \frac{n}{f}$ da cui $p(E') = 1 - p(E)$

e quindi $p(E) + p(E') = 1$

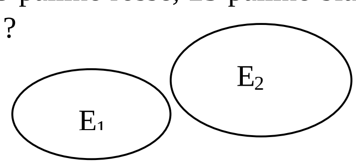
Teorema della probabilità totale

Dati due o più eventi parziali ***incompatibili*** $E_1, E_{2,\ldots\ldots,} E_n$ si dice evento totale l'evento E che consiste nel verificarsi di uno o (**"aut"**) dell'altro dei vari eventi parziali.
Chiamiamo probabilità totale o probabilità dell'evento unione la somma delle probabilità degli eventi parziali, ovvero:

$$\underline{p(E_1 \cup E_2 \cup \ldots\ldots\ldots \cup E_n) = p(E_1) + p(E_2) + \ldots\ldots + p(E_n)} \qquad (2)$$

Esempio 1
caso in cui i due eventi sono incompatibili:
qual è la probabilità di estrarre da unurna contenente 5 palline rosse, 25 palline bianche e 15 palline verdi, una pallina bianca (E_1) o rossa (E_2) ?

$$p = \frac{25}{45} + \frac{5}{45} = \frac{2}{3}$$

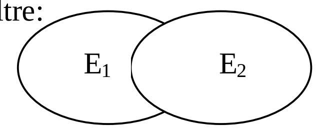


Come fare per determinare la probabilità totale ***<u>se gli eventi sono compatibili</u>*** **("VEL")**?
Per semplicità supporremo il caso di due soli eventi $E_1 \quad ed \quad E_2$ compatibili.

Osserviamo che $E_2 - (E_1 \cap E_2)$ è incompatibile con E_1 e che

$$E_1 \cup E_2 = E_1 \cup (E_2 - (E_1 \cap E_2))$$

ed inoltre:



$$E_2 = (E_1 \cap E_2) \cup (E_2 - (E_1 \cap E_2))$$

poiché gli insiemi dei secondi membri delle due uguaglianze sono disgiunti, vale il secondo assioma e quindi:

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2 - (E_1 \cap E_2))$$

$$p(E_2) = p(E_1 \cap E_2) + p(E_2 - (E_1 \cap E_2))$$

sottraendo membro a membro si ha:

$$p(E_1 \cup E_2) - p(E_2) = p(E_1) - p(E_1 \cap E_2))$$

,da cui:

$$\underline{p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)} \qquad (3)$$

Possiamo concludere dicendo che: dati due eventi <u>compatibili</u>, la probabilità dell'evento unione (probabilità totale) è data dalla somma delle probabilità dei singoli eventi diminuita della probabilità dell'evento intersezione.
Come è facile verificare, il caso degli eventi incompatibili rientra come caso particolare di quello appena considerato. Infatti se gli eventi $E_1 \ ed \ E_2$ sono incompatibili $E_1 \cap E_2 = 0$ e la (3) assume la forma della (2).
Quanto è stato detto per due eventi può essere esteso al caso di più eventi. Se gli eventi sono 3 si ha:

$$p(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) - p(E_1 \cap E_2) - p(E_1 \cap E_3) - p(E_2 \cap E_3) +$$
$$+ p(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$$

Esempio 2

Consideriamo il caso in cui i due eventi sono **compatibili:**
Un'urna contiene 40 palline numerate da 1 a 40. Qual è la probabilità di estrarre un numero pari o (vel) divisibile per 5?
Essendo:

$E_1 = \{\ 2\ ;\ 4\ ;\ 6\ ;\ 8\ ;......40\ \}$

$E_2 = \{\ 5\ ;\ 10\ ;\ 15\ ;......40\ \}$ si ha: $p = \frac{20}{40} + \frac{8}{40} - \frac{4}{40} = \frac{3}{5}$

$E_1 \cap E_2 = \{\ 10\ ;\ 20\ ;\ 30\ ;\ 40\ \}$

Esempio 3

Calcola la probabilità che, lanciando due dadi, si abbia un numero pari (E_1) o maggiore di 6 (E_2).

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	**1,6**
2,1	2,2	2,3	2,4	**2,5**	2,6
3,1	3,2	3,3	**3,4**	3,5	3,6
4,1	4,2	**4,3**	4,4	4,5	4,6
5,1	**5,2**	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Essendo:

$p(E_1) = \frac{18}{36}$ $p(E_2) = \frac{21}{36}$ $p(E_1 \cap E_2) = \frac{9}{36}$ si ha: $p = \frac{18}{36} + \frac{21}{36} - \frac{9}{36} = \frac{5}{6}$

<u>Probabilità condizionata</u>

Si chiama probabilità condizionata la probabilità che **un evento E_1 si verifichi, nell'ipotesi che un altro evento E_2 si sia realizzato**. Essa viene indicata con $p(E_1 / E_2)$ (si legge E_1 subordinato a E_2) è data dal rapporto tra la probabilità che si verifichino contemporaneamente i due eventi e la probabilità che si realizzi (E_2), ossia:

$$p(E_1 / E_2) = \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_2)} \quad \text{da cui si ricava: } p(E_1 \cap E_2) = p(E_2)\ p(E_1 / E_2)$$

Esempio 1

Qual è la probabilità di estrarre da un'urna contenente i 90 numeri del lotto un numero che (sicuramente) è multiplo di 4 (E_1) e divisibile per 6 (E_2) ?

$p(E_1) = \frac{22}{90}$ $p(E_1 \cap E_2) = \frac{7}{90}$ $p(E_2 / E_1) = \frac{\frac{7}{90}}{\frac{22}{90}} = \frac{7}{22}$

Esempio 2

Lanciamo due dadi e siamo certi che su uno di essi si presenta la faccia 2. Qual è la probabilità di ottenere 6 come punteggio totale?
Il punteggio 6 (E_2) è condizionato dal verificarsi della presenza della faccia 2 (E_1) su uno dei due dadi.

Si ha quindi: $p(E_1) = \frac{11}{36}$ $p(E_1 \cap E_2) = \frac{2}{36}$

2,1	2,2	2,3	**2,4**	2,5	2,6
1,2		3,2	**4,2**	5,2	6,2

$$p(E_2 / E_1) = \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_1)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{2}{11}.$$

Esempio 3

Un'urna contiene 32 palline rosse e 18 palline verdi. Qual è la probabilità che si estraggano 3 palline rosse nelle prime tre estrazioni?

$p(E_1) = \frac{32}{50}$ $p(E_2 / E_1) = \frac{31}{49}$ $p(E_3 / E_2) = \frac{30}{48}$

$$p(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{32}{50}\,\frac{31}{49}\,\frac{30}{48} = 0{,}25$$

<u>Probabilità composta</u>

Si dice evento composto l'evento E che consiste nel verificarsi di tutti gli eventi componenti.
La probabilità composta di due o più ***<u>eventi indipendenti</u>*** è data dal prodotto delle probabilità degli eventi componenti.

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2)$$

Es: qual è la probabilità di estrarre una figura di coppe da un mazzo di 40 carte.(deve essere una figura "et" deve essere di coppe)

$$E_1 = 3 \cdot 4 = 12$$
$$E_2 = 10$$

$$p = \frac{12}{40} \cdot \frac{10}{40} = \frac{3}{40}$$

Se gli ***<u>eventi</u>*** sono ***<u>dipendenti</u>***, come nel seguente esempio:

Qual è la probabilità di estrarre da un'urna, contenente 20 palline verdi e 10 palline rosse, due palline rosse se non si rimette nell'urna la prima estratta ?
In questo caso la probabilità si ottiene moltiplicando la probabilità del primo evento per la probabilità del secondo calcolando quest'ultima nell'ipotesi che si sia verificato il primo evento

$$p = \frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} = \frac{9}{87}$$

Il caso degli eventi dipendenti si configura come un caso particolare della probabilità condizionata (vedi es. 3).

<u>Formula di Bayes</u>

Sappiamo che $p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2 / E_1)$ e $p(E_1 \cap E_2) = p(E_2) \cdot p(E_1 / E_2)$

Dall'uguaglianza dei secondi membri si ricava: $p(E_2 / E_1) = \dfrac{p(E_2) \cdot p(E_1 / E_2)}{p(E_1)}$

Che viene detta **formula di Bayes**. Essa risponde ad un quesito che spesso ci poniamo quando affrontiamo lo studio di eventi aleatori: "Se un evento E_1 si è verificato qual è la probabilità che la causa del suo verificarsi sia stato proprio l'evento E_2 ?

Volendo generalizzare il problema, si avrà: $p(H_i / E) \quad = \quad \dfrac{p(H_i) \cdot p(E / H_i)}{\sum_1^n \; p(H_i) \cdot \; p(E / H_i)}$,

(con n = numero delle cause.)
Supponiamo che l'evento E si verifichi a 3 diverse condizioni H_1 , H_2 , H_3 tra loro mutuamente incompatibili. Se conosciamo le probabilità $p(H_1)$, $p(H_2)$, $p(H_3)$ delle ipotesi e conosciamo anche quale probabilità danno all'evento E le ipotesi H_i prima di effettuare la prova, ovvero $p(E / H_1)$, $p(E / H_2)$, $p(E / H_3)$ La formula di Bayes consente di ricavare la probabilità $p(H_3 / E)$. Essa è data da:

$$p(H_3 / E) \quad = \quad \frac{p(H_3) \cdot p(E / H_3)}{p(H_1) \cdot \; p(E / H_1) + p(H_2) \cdot \; p(E / H_2) + p(H_3) \cdot \; p(E / H_3)}$$

Per capire meglio il significato di questa formula consideriamo i seguenti esempi:

Esempio 1
Siano date 5 urne cosi'formate:
-2 urne (composizione H_1) contengono 2 palline bianche e 3 nere;
-2 urne (composizione H_2) contengono 1 pallina bianca e 4 nere,
-1 urna (composizione H_3) contiene 4 palline bianche e 1 nera.
Si sceglie una pallina da un'urna a caso. La pallina è bianca. Qual è la probabilità che la pallina sia stata estratta dall'urna della terza composizione ?

calcoliamo : $p(H_1) = \frac{2}{5}$ (due urne su cinque); $p(H_2) = \frac{2}{5}$; $p(H_3) = \frac{1}{5}$

inoltre: $p(E/H_1) = \frac{2}{5}$ (due palline bianche su cinque) e $p(E/H_2) = \frac{1}{5}$; $p(E/H_3) = \frac{4}{5}$

la probabilità richiesta sarà quindi:

$$p(H_3/E) = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}}{\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{2}{5}$$

Esempio 2

Un'urna A contiene 20 numeri dei quali 5 pari, un'urna B contiene 30 numeri dei quali 10 pari e un'urna C contiene 40 numeri dei quali 20 pari. Si estrae da un'urna a caso un numero. Supposto di aver estratto un numero pari, qual è la probabilità che il numero sia stato estratto dall'urna A?

$p(H_1) = \frac{1}{3}$ (un'urna su tre) $p(H_2) = \frac{1}{3}$; $p(H_3) = \frac{1}{3}$

$p(E/H_1) = \frac{5}{20}$ (5 numeri par su 20) $p(E/H_2) = \frac{10}{30}$; $p(E/H_3) = \frac{20}{40}$

$$p(H_1/E) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{20}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{20} + \frac{1}{3} \cdot \frac{10}{30} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{13}$$

Esempio 3

Un negozio è fornito di lampadine dalle due ditte A e B.

Un cliente compra una lampadina che viene presa a caso da una delle due scatole (n°1 e n°2) dove vengono tenute le lampadine.

Sapendo che la scatola n°1 contiene 30 lampadine della ditta A e 15 della ditta B e che la scatola n° 2 contiene 20 lampadine della ditta A e 30 della ditta B, calcolare la probabilità che la lampadina acquistata sia stata presa dalla scatola n° 1.

In questo caso le scatole rappresentano le condizioni che possono dar luogo al verificarsi dell'evento prestabilito (lampadina presa da A)

Supponendo che le due scatole abbiano la stessa probabilità di essere scelte, risulta:

$p(H_1) = \frac{1}{2}$; $p(H_2) = \frac{1}{2}$

inoltre: $p(E/H_1)=\frac{30}{45}=\frac{2}{3}$; $p(E/H_2)=\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$

quindi: $p(H_1/E)=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}}=\frac{5}{8}$ e, volendo determinare la probabilità che la lampadina venduta provenga dalla scatola n° 2, basterà considerare $p(H_2/E)=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$

DISTRIBUZIONE BINOMIALE O DI BERNOULLI

Consideriamo un problema molto importante per le applicazioni pratiche del calcolo della probabilità: "**Il problema delle prove ripetute**"
Consideriamo un evento E, ripetibile, e supponiamo di effettuare n prove, tutte nelle stesse condizioni, di un esperimento del quale E può essere un risultato.
Il problema che ci poniamo è il seguente:
Dato un numero k ($0 \le k \le n$), qual è la probabilità che l'evento scelto E si verifichi **k** volte in **n** prove?
Detta **p** la probabilità di E e **q** la probabilità dell'evento contrario, $\overline{E}$ possiamo osservare che se l'evento E si presenta **k** volte, l'evento $\overline{E}$ si presenta **n-k** volte.

- Se consideriamo il caso in cui E si verifichi nelle prime k prove e indichiamo con $p_{n,k}$ la probabilità cercata, si ha:

$$\underline{p_{n,k} \quad = \quad p^k\ q^{n-k}}$$

- Se invece si vogliono considerare valide tutte le modalità con le quali E può presentarsi k volte è necessario osservare che queste sono tante quante le combinazioni semplici prese a k a k, quindi: $\underline{p_{n,k} = \binom{n}{k} p^k\ q^{n-k}}$

Esempio 1

Lanciamo 10 volte un dado. Qual è la probabilità che la faccia 6 si presenti le prime 4 volte?

Applicando la formula di Bernoulli si ha: $\underline{p_{10,4} = \left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^6}$

Esempio 2

Estraiamo per 12 volte una carta da un mazzo da 40. Calcola la probabilità di estrarre 6 volte una carta rossa.

Essendo: $p = \frac{20}{40} \quad e \quad q = \frac{20}{40}$

$$p_{12,\,6} \quad = \binom{12}{6}\left(\frac{20}{40}\right)^6\left(\frac{20}{40}\right)^6 = \frac{924}{4096}$$

Speranza matematica

Spesso risulta utile indicare l'insieme dei valori di una variabile casuale X con un valore di sintesi che di solito è M(X).

Sia X una variabile casuale discreta che può assumere valori positivi (vincite) o negativi (perdite), si chiama speranza matematica o valor medio la somma dei prodotti delle vincite e perdite per le relative probabilità:

$$M(X) = \sum_1^n x_i \; p_i$$

Poichè $\sum_1^n p_i = 1$ potremo scrivere:

$$M(X) = \frac{\sum_1^n x_i \; p_i}{\sum_1^n p_i}$$

Quindi, la speranza matematica è la media ponderata dei valori x_i che hanno pesi p_i

Supponiamo di giocare con due monete identiche. Ogni giocatore vince 10 euro se si presentano due "croci", vince 5 euro se si presenta una sola "croce", perde 6 euro se escono due "teste". Qual è la speranza matematica ?

notando che i casi possibili sono 4 : TT TC CT CC , consideriamo la seguente tabella:

x	+10	+5	-6
P	1/4	½	1/4

La speranza matematica del giocatore è: $M(X) = 10\cdot\frac{1}{4} \; + \; 5\cdot\frac{1}{2} \; -6\cdot\frac{1}{4} = 3{,}50$

Il probabile guadagno del giocatore è quindi di 3,50 euro.

Il gioco sarebbe equo se il giocatore puntasse 3,50 euro per ogni giocata.