TEORIA DELLE MATRICI

Dato un campo K, definiamo matrice ad elementi in K di tipo (m, n) un insieme di numeri ordinati secondo m righe ed n colonne in una tabella rettangolare del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots\dots\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots\dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots\dots a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{dove} \quad a_{ij} \in K \quad \begin{matrix} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{matrix}$$

Una matrice A del tipo (m, n) è composta da $m \times n$ elementi disposti secondo m righe e secondo n colonne. Tutti gli elementi vengono indicati con doppio indice, il primo indica la riga, il secondo la colonna.
In modo compatto una matrice si può indicare con

$$A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

Se $m \neq n$ la <u>matrice è rettangolare</u>, se $m = n$ la <u>matrice è quadrata</u>. In quest'ultimo caso il numero delle righe (o colonne) prende il nome di ordine della matrice.
Diamo adesso delle definizioni di uso frequente.

1) Chiamasi **linea** della matrice indifferentemente una riga o una colonna, linee parallele più righe o più colonne.
2) In due linee parallele si dicono corrispondenti gli elementi di ugual posto, cioè l'elemento p^{mo} dell'una con l'elemento p^{mo} dell'altra, qualunque sia p.
3) Una linea si dice identicamente nulla se sono tutti nulli i suoi elementi.
4) Due linee si dicono uguali o proporzionali quando gli elementi dell'una sono uguali o proporzionali ai corrispondenti dell'altra.
5) Una **matrice** si dice **nulla** se ha nulli tutti i suoi elementi.
6) Due **matrici** si dicono **simili** quando hanno lo stesso numero di righe e di colonne, in due matrici simili si dicono corrispondenti gli elementi di ugual posto.
7) Due matrici di $m \times n$ *elementi*: $A = \left(a_{ij}\right)$ *e* $B = \left(b_{ij}\right)$ sono uguali se sono uguali tutti i corrispondenti elementi, cioè se $a_{ij} = b_{ij}$ per ogni i e per ogni j.
8) In una matrice quadrata $A = \left(a_{ij}\right)$ di ordine n, gli elementi a_{ij} *con* $i = j$ (cioè gli elementi $a_{11}, a_{22}, \dots\dots, a_{nn}$) costituiscono la <u>diagonale principale</u>, mentre gli elementi $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \dots\dots, a_{n1}$ costituiscono la <u>diagonale secondaria</u>.
9) In una matrice quadrata, due elementi a_{ik}, a_{ki} che hanno gli stessi indici, ma in ordine inverso, si dicono <u>coniugati</u>, i loro posti sono simmetrici rispetto alla diagonale principale.

Gli elementi che stanno sulla diagonale principale sono coniugati di se stessi. Nel caso particolare che gli elementi siano tra loro uguali, cioè sia $a_{ik} = a_{ki}$, la matrice quadrata si dice **simmetrica**.

L'insieme di tutte le matrici $m \times n$ a coefficienti in K si indica con $K^{m,n}$.
Data una matrice $A \in K^{m,n}$, la **trasposta** di A è la matrice che si indica con ${}^tA$, ottenuta da A scambiando fra loro le righe con le colonne.

Es. - $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in K^{2,3}$ $\qquad$ ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in K^{3,2}$

In generale, se $A \in K^{m,n}$, ${}^tA \in K^{n,m}$.
Si ha
${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

L'insieme $K^{m,n}$ si può dotare di una struttura algebrica. Cominciamo, infatti, a definire un'operazione di somma tale che $K^{m,n}$ sia un gruppo abeliano (cioè gode della proprietà commutativa).

Somma di matrici

Siano $A = (a_{i,j})$ e $B = (b_{i,j})$ due matrici $m \times n$ a coefficienti in K. La <u>matrice somma</u> A + B è una matrice $C = (c_{i,j})$ definita da
$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} \qquad con\ i, j \in \mathbf{N} : 1 \le i \le m \quad 1 \le j \le n$
Quindi la matrice C è la matrice ottenuta sommando gli elementi corrispondenti di A e di B.

Es.
Siano assegnate le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

La matrice somma sarà:

$$A + B = C = \begin{pmatrix} 1+0 & 2-1 & 3+5 \\ 4-2 & 5-3 & 6+4 \end{pmatrix}$$

Per cui otteniamo:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

La somma di due matrici A e B è definita solo quando A e B hanno lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne.
L'operazione somma di matrici soddisfa le proprietà dei gruppi abeliani :
a1) A + (B +C) = (A + B) + C $\forall A, B, C \in K^{m,n}$
a2) A + B = B + A
a3) $\exists\, 0 \in K^{m,n} : A + 0 = 0 + A = A$
a4) $\forall A \in K^{m,n}\ \exists B \in K^{m,n} : A + B = B + A = 0$

Per quanto riguarda il prodotto nell'insieme $K^{m,n}$ delle matrici $m \times n$ è possibile introdurre due tipi di prodotto :

- prodotto esterno matrice per scalare
- prodotto interno righe per colonne.

Prodotto di una matrice per uno scalare

Sia $A = \left(a_{ij}\right) \in K^{m,n}$ una matrice $m \times n$ a coefficienti nel campo K e λ uno scalare, cioè un elemento del campo su cui si opera.
Chiamiamo prodotto di λ per A la matrice

$$C = \left(a_{ij}\right) \in K^{m,n} \ dove\ a_{ij} = \lambda\, a_{ij} \quad \forall i = 1,....,m\ e\ \forall\, j = 1,....,n$$

In altre parole, la matrice C = λ A è la matrice ottenuta moltiplicando ogni elemento di A per il numero λ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & .....a_{1n} \\ a_{21} & .....a_{2n} \\ ..... & \\ a_{m1} & .....a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \lambda\, A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & .....a_{1n} \\ a_{21} & .....a_{2n} \\ ..... & \\ a_{m1} & .....a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & .....\lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & .....\lambda a_{2n} \\ ..... & \\ \lambda a_{m1} & .....\lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Il prodotto matrice per scalare gode di quattro fondamentali proprietà:

1) proprietà associativa: $(\lambda\,\mu) A = \lambda(\mu\, A) \qquad \forall A \in K^{m,n} \qquad \lambda, \mu \in K$
2) distributiva $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda\, A + \mu\, A$
3) distributiva $\lambda(A + B) = \lambda\, A + \lambda\, B \quad \forall A, B \in K^{m,n}\ \forall \lambda \in K$
4) prodotto per 1 $1 \cdot A = A \qquad (-1) \cdot A = -A$

Consideriamo l'insieme $K^{m,n}$ con le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare così definita.
$K^{m,n}$ rispetto alla somma è un gruppo abeliano, mentre rispetto al prodotto, che è un prodotto esterno, gode delle quattro proposizioni sopra elencate. Per cui, l'insieme $K^{m,n}$ delle matrici $m \times n$ a coefficienti in K è un esempio di spazio vettoriale, una struttura su

cui sono definite due operazioni una interna (somma) e l'altra esterna (prodotto per uno scalare)

Prodotto interno righe per colonne

Per quanto riguarda il prodotto interno, il più importante è il prodotto righe per colonne.
Tale prodotto è possibile quando il numero delle colonne della prima matrice è uguale al numero delle righe della seconda matrice.
Quindi, se $A = \left(a_{ij}\right) \in K^{m,n}$ e $B = \left(b_{ij}\right) \in K^{p,q}$ il prodotto $A \times B$ è definito solo se $n = p$.
Se le matrici A e B soddisfano a questa condizione, si dicono compatibili per la moltiplicazione.
Con questa condizione, si definisce il prodotto tra le matrici A e B.

$$A \times B = C = \left(c_{ij}\right) \in K^{m,q}$$

La matrice C del tipo (*m*, *q*) il cui elemento generico c_{ij} è dato da

$$\left\| c_{ij} \right\| = \sum_{l=1}^{n} a_{il}\, b_{lj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots\ldots + a_{in}b_{nj}$$

La relazione precedente afferma che per ottenere l'elemento c_{ij} di C si considera la riga i - esima di A e la colonna j - esima di B, si eseguono i prodotti dei termini corrispondenti e si sommano i prodotti così ottenuti.

$$\ldots A \times B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1j} & \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2j} & \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & \ldots a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & \ldots\ldots a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots b_{1j} & \ldots\ldots b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots b_{2j} & \ldots b_{2q} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{i1} & b_{i2} & \ldots & \ldots b_{iq} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots b_{nj} & \ldots\ldots b_{nq} \end{pmatrix} =$$

$$\ldots \qquad = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & \ldots c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2q} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots c_{ij} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mq} \end{pmatrix}$$

Per questo il prodotto di matrici prende il nome di prodotto righe per colonne.

Si vede facilmente che il prodotto $A \times B = C$ è del tipo (m, q). Infatti, poiché il generico elemento c_{ij} si ottiene dalla i - esima riga di A e dalla j - esima colonna di B, e poiché $A \in K^{m,n}$ e $B \in K^{p,q}$ $con\ n = p$, allora i può assumere soltanto i valori 1,.....,m mentre j può assumere solo i valori 1,.....,q , per cui la matrice $A \times B = C$ ha tante righe e colonne quante ne ha B.

Esempio 1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in K^{3,2} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in K^{3,2}$$

$$A \times B = C \in K^{2,2} \quad C = \left(c_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 2\times 1 + 0\times 0 + 1\times 2 & 2\times(-1) + 0\times 1 + 1\times(-1) \\ 1\times 1 + (-1)\times 0 + 3\times 2 & 1\times(-1) + (-1)\times 3 + 3\times(-1) \end{pmatrix}$$

Avremo pertanto

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 7 & -7 \end{pmatrix}$$

Esempio 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad A \cdot B = \begin{pmatrix} 1+4 \\ 0+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Proprietà del prodotto di matrici

Il prodotto di matrici gode delle seguenti proprietà

1) Sia $A \in K^{m,n}$, $B \in K^{n,p}$, $C \in K^{p,q}$ allora risulta
   $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
2) Se A e B sono matrici del tipo (m, n) e C è una matrice del tipo (n, p) allora
   $(A + B)C = AC + BC$ (proprietà distributiva a sinistra)
   Se invece A è una matrice $m \times n$ e B e C sono matrici $n \times p$ allora
   $A(B + C) = AB + AC$ (proprietà distributiva a destra)

Dunque, il prodotto righe per colonne gode della proprietà associativa (1) e della proprietà distributiva rispettivamente a sinistra e a destra rispetto alla somma.
Si ha inoltre:

se $A \in K^{m,n}$ e $B \in K^{n,p}$ ed è $\alpha \in \mathbf{R}$ allora
$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

Il prodotto di matrici non è commutativo, per cui se $A \in K^{m,n}$ e $B \in K^{n,m}$ sono definite entrambe le matrici prodotto $A \times B = C \in K^{m,m}$ e $B \times A = C' \in K^{n,n}$, in generale risulta
$C = A \times B \neq B \times A = C'$.

Ciò è sicuramente vero se si considerano matrici quadrate

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K^{2,2}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in K^{2,2}$

$A \times B = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad B \times A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$ quindi $A \times B \neq B \times A$

Teorema di Binet

Le definizioni date, riguardanti il prodotto fra matrici, sono giustificate dal seguente teorema di Binet : Date due matrici simili A e B di m righe ed n colonne, il determinante del loro prodotto per righe è nullo se n < m ; se le matrici sono quadrate il determinante del loro prodotto è uguale al prodotto dei loro determinanti; se n>m il determinante del loro prodotto è uguale alla somma di tutti i prodotti che si ottengono moltiplicando ogni minore di A di ordine m per il minore corrispondente di B.

Altre proprietà algebriche delle operazioni matriciali

Se A è una matrice e c è un elemento del campo K su cui si opera, cioè

$A \in K^{m,n}$ e $c \in K \Rightarrow {}^t(cA) = c\,{}^tA$ $\quad \begin{cases} t: K^{m,n} \longrightarrow K^{n,m} \\ A \longrightarrow {}^tA \end{cases}$

Se A e B sono matrici $m \times n$ allora
${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

Se $A \in K^{m,n}$ allora ${}^t({}^tA)) = A$

Se A è una matrice $m \times n$ e B è una matrice $n \times p$ allora risulta
${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$

Quindi avremo: La trasposta del prodotto di due matrici si ottiene moltiplicando le trasposte delle matrici in ordine inverso.