Alcune applicazioni delle derivate

1. Determinare a, b, c, d in modo che la curva γ di equazione $y = \dfrac{a\,x^2 + b}{cx + d}$ abbia un asintoto **parallelo** alla retta $y = 2x + 2$ e abbia nel punto $A(0;1)$ la tangente inclinata di $\dfrac{\pi}{4}$ sull'asse x.
2. Sulla semicirconferenza di diametro $AB = 2r$ determinare il punto P in modo che sia **massima** l'area del triangolo PHB, essendo H la proiezione di P su AB.
3. Tra tutte le parabole del fascio $y = x^2 - 2k\,x + 1$ determina quelle il cui vertice ha distanza **minima** dall'origine.
4. Calcola il $\lim\limits_{x\to\infty} x \ln \dfrac{x-1}{x+1}$ mediante la regola di **De L'Hospital**.
5. Determina i flessi della funzione $f(x) = \ln^3 x - 9\ln x$
6. Dopo aver determinato i valori dei parametri λ e μ della funzione $f(x) = \begin{cases} \lambda\,x + 2 & per \quad x \geq 1 \\ \mu\,x^2 + 5x & per \quad x < 1 \end{cases}$ affinché sia **continua e derivabile** $\forall x \in$ ß, disegnarne il grafico e determinare il punto $x_0 \in [0;2]$ in cui viene verificato il teorema di Lagrange.
7. Determinare i punti di **massimo e di minimo relativi e assoluti** della funzione $y = \left|x^2 + 3x - 4\right|$.
8. Calcolare a e b in modo che la curva $y = ax^3 - 5x^2 + 3x + b$ abbia un flesso nel punto $A(3;-1)$. Scrivere poi l'equazione della **tangente inflessionale** e dire se tale retta ha altre intersezioni con la curva.
9. Data la funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & per \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & per \quad x > 1 \end{cases}$ dimostrare che valgono le ipotesi del **teorema di Lagrange** e determinare nell'intervallo $[0;2]$ i punti che soddisfano il teorema.
10. Determina se sono verificate le ipotesi del teorema di Cauchy per le funzioni $f(x) = e^{x^2+1}$ e $g(x) = x^2 + 2$ nell'intervallo $[0;1]$. In caso affermativo calcola i punti dell'intervallo che verificano il teorema.

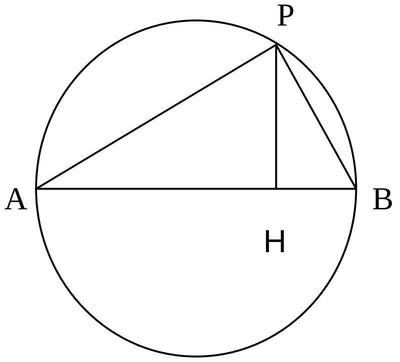
Soluzioni

N°1

Essendo $m = 2$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{ax^2 + b}{cx^2 + dx} = 2 \iff \dfrac{a}{c} = 2$. Inoltre, poiché $A \in \gamma$, si ha: $\dfrac{b}{d} = 1$. E, sapendo che $f\,'(0) = 1$, risulta: $-\dfrac{bc}{d^2} = 1$. Dal sistema: $\begin{cases} a = 2c \\ b = d \\ bc = -d^2 \end{cases}$ ricaviamo: $\begin{cases} a = -2d \\ b = d \\ c = -d \end{cases}$

Sostituendo nell'equazione assegnata si ha: $y = \dfrac{-2dx^2 + d}{-dx + d} \quad \Leftrightarrow \quad y = \dfrac{2x^2 - 1}{x - 1}$

N°2



Posto $BH = x \quad (0 < x < 2r)$ si ha:

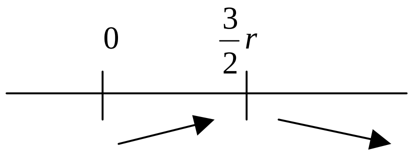
$PH = \sqrt{x(2r - x)}$

$A(x) = \dfrac{1}{2} x \sqrt{x(2r - x)} = \dfrac{1}{2} x \sqrt{2rx - x^2}$

$A'(x) = \dfrac{1}{2} \sqrt{2r\,x - x^2} + \dfrac{1}{2} x \dfrac{2r - 2x}{2\sqrt{2r\,x - x^2}}$

$A'(x) > 0 \quad quando \quad 3rx - 2x^2 > 0$ ossia

quando $0 < x < \dfrac{3}{2} r$



L'area sarà massima quando $x = \dfrac{3}{2} r.$

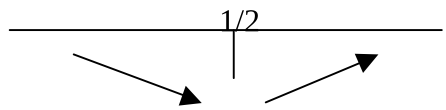
N° 3

Poiché $O(0;0)$ e $V(k;1-k^2)$ $\quad d(k) = OV = \sqrt{k^2 + (1-k)^2} = \sqrt{2k^2 - 2k + 1}$

Per determinare quando la distanza OV è minima operiamo come segue:

$d'(k) = \dfrac{4k - 2}{2\sqrt{2k^2 - 2k + 1}}; \quad d'(k) = \dfrac{2k - 1}{\sqrt{2k^2 - 2k + 1}}$

$d'(k) > 0$ quando $2k - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad k > \dfrac{1}{2}$



In conclusione, la distanza OV è minima per $k = \dfrac{1}{2}.$

N° 4

$$\lim_{x\to\infty} x \ln\frac{x-1}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\frac{x-1}{x+1}}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}(H) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x^2-1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2}{x^2-1} = -2.$$

N° 5

Per rispondere al quesito proposto studiamo il segno della derivata seconda nel dominio $D =]0;+\infty[$

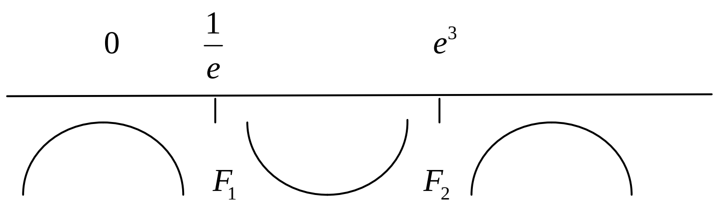
$$f'(x) = \frac{3\ln^2 x}{x} - \frac{9}{x}$$

$$f''(x) = \frac{6\ln x - 3\ln^2 x + 9}{x^2}$$

$f''(x) > 0$ quando $3\ln^2 x - 6\ln x - 9 < 0 \iff \ln^2 x - 2\ln x - 3 < 0$

essendo $\frac{\Delta}{4} = 1 + 3 = 4$ si ha $\ln x = -1$ *e* $\ln x = 3$ *ossia* $x_1 = \frac{1}{e}$ *e* $x_2 = e^3$.

Quindi $f''(x) > 0$ *per* $\frac{1}{e} < x < e^3$



La funzione presenta due punti di flesso in $x = \frac{1}{e}$ e $x = e^3$

N° 6

La funzione è continua quando $\lim_{x\to 1^-}(\mu x^2 + 5x) = \lim_{x\to 1^+}(\lambda x + 2) \iff \mu + 5 = \lambda + 2$

La funzione è derivabile quando $\lim_{x\to 1^-} 2\mu x + 5 = \lim_{x\to 1^+} \lambda \iff 2\mu + 5 = \lambda$

Dal sistema $\begin{cases} \lambda = 2\mu + 5 \\ \mu + 5 = \lambda + 2 \end{cases}$ ricaviamo $\begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = -2 \end{cases}$ Quindi $f(x) = \begin{cases} \lambda x + 2 & per \quad x \geq 1 \\ -2x^2 + 5x & per \quad x < 1 \end{cases}$

Il punto $x_0 \in [0;2]$ che verifica il teorema di Lagrange si ottiene da $\frac{f(2) - f(0)}{2} = f'(x_0)$ ovvero:

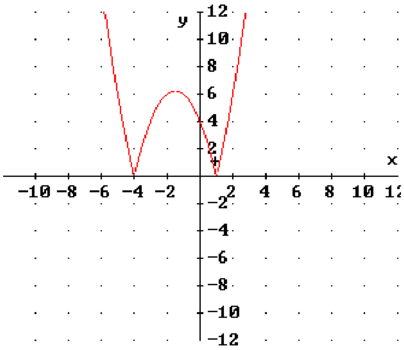
$-4x_0 + 5 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{3}{4}$.

N° 7

Dopo aver osservato che $x^2 + 3x - 4 > 0$ quando $x < -4 \quad \vee \quad x > 1$

Studiamo la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 4 & per \quad x < -4 \quad \vee \quad x > 1 \\ -x^2 - 3x + 4 & per \quad -4 < x < 1 \end{cases}$

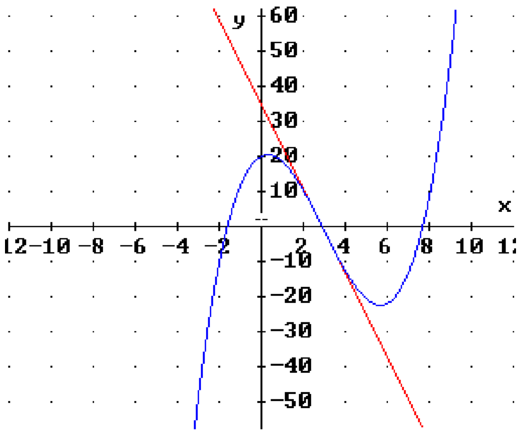
e otteniamo il seguente grafico



che presenta due punti di minimo relativi ed assoluti non stazionari in $x=-4$ e $x=1$; un punto di massimo relativo stazionario in $x=-\frac{3}{2}$

N°8

Per l'appartenenza di A alla curva possiamo scrivere: $27a-45+6+b=-1$ essendo inoltre A un punto di flesso $y''(3)=0$ ovvero $18a-10=0$



Dal sistema $\begin{cases} 27a-45+6+b=-1 \\ 18a+10=0 \end{cases}$

si ricava:

$$\begin{cases} a=\frac{5}{9} \\ b=20 \end{cases} \Rightarrow \quad y=\frac{5}{9}x^3-5x^2+3x+20$$

Essendo $y'(3)=-12$ l'equazione della tangente inflessionale sarà:

$y+1=-12(x-3)$.

N° 9

La funzione risulta continua,infatti $\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^+} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to1^-}\frac{3-x^2}{2}=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad 1=1$

La funzione risulta derivabile, infatti

$$\lim_{x\to1^-} f'(x)=\lim_{x\to1^+} f'(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to1^-}(-x)=\lim_{x\to1^+}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad -1=-1$$

Quindi: derivando nell'intervallo $[0;1]$ $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{2}=-c \quad \Leftrightarrow \quad c_1=\frac{1}{2}$

e derivando nell'intervallo $[1;2]$ $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{2}=-\frac{1}{c^2} \quad \Leftrightarrow \quad c_2=\sqrt{2}.$

N° 10

Essendo $f(x)$ e $g(x)$ continue e derivabili ed essendo $g'(x)\neq 0 \quad \forall x\in D_g$ si ha:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^2-e}{3-2}=\frac{e^{x^2+1}(2x)}{2x} \quad \Leftrightarrow \quad e^{x^2+1}=e^2-e$$

$$\ln e^{x^2+1}=\ln\left(e^2-e\right) \quad \Leftrightarrow \quad x^2=\ln\left(e^2-e\right)-1 \quad \Leftrightarrow x^2=\ln\left(e^2-e\right)-\ln e \quad \Leftrightarrow \quad x=\sqrt{\ln(e-1)}.$$