§ Calcolo di limiti che si presentano nelle forme indeterminate

$$\frac{0}{0};\quad \frac{\infty}{\infty};\quad \infty-\infty;\qquad 0\cdot\infty;\quad 0^0;\quad \infty^0;\quad 1^\infty$$

forma $\frac{0}{0}$

Occorre semplificare la frazione.

§ $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=3$$

§ $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3\,sen^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3(1-\cos^2 x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3(1-\cos x)(1+\cos x)}=\frac{1}{6}$$

§ $$\lim_{x\to 0^+}\frac{sen\,3x}{\sqrt{1-\cos 3x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{sen\,3x\sqrt{1+\cos 3x}}{\sqrt{1-\cos 3x}\sqrt{1+\cos 3x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{sen\,3x\sqrt{1+\cos 3x}}{sen\,3x}=\sqrt{2}$$

forma $\frac{\infty}{\infty}$

Se i termini della frazione sono polinomi si divide numeratore e denominatore per il grado massimo dell'incognita.

§ $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+1}{3x^3-4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x^3}}{3-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{2}{3}$$

Osserviamo che: se il grado del numeratore è maggiore di quello del denominatore il limite risulta ∞; se invece è minore il limite è 0.

§ $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{1}{0}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}}=\frac{0}{1}=0$$

Prestare attenzione in presenza di radicali….!

§ $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-5}{\sqrt{9x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-5}{\sqrt{x^2\left(9+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-5}{|x|\sqrt{\left(9+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-5}{-x\sqrt{\left(9+\frac{1}{x^2}\right)}}=-1$$

§ $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{e^{3x}}+\frac{1}{e^{3x}}}=\frac{1}{0}=+\infty$$

forma $\infty-\infty$

§ $$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x^2+x)}=-1$$

§ $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x-x^2+3}{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+3}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}\right)}=\frac{4}{2}=2$$

§ $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt[3]{x^3+5}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1-x^3-5}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+\sqrt[3]{(x^3+1)(x^3+5)}+\sqrt[3]{(x^3+5)^2}}=0$$

....

Ricordando che per le forme indeterminate $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$ vale il teorema di De L'Hospital (H) consideriamo adesso i seguenti esercizi.

forma $0\cdot\infty$

$$\lim_{x\to1}\ln(1-x)\ln x=\lim_{x\to1}\frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}}=(H)=\lim_{x\to1}\frac{x\ln^2 x}{1-x}=(H)=\lim_{x\to1}\frac{\ln^2 x+2x\ln x\cdot 1/x}{-1}=0$$

forma 0^0

$$\lim_{x\to0^+}x^{sen\,x}=\lim_{x\to0^+}e^{sen\,x\ln x}=e^0=1$$ infatti

$$\lim_{x\to0^+}sen\,x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{sen\,x}}=(H)=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{sen^2 x}}=\lim_{x\to0^+}-\frac{sen\,x}{x}\frac{sen\,x}{\cos x}=0$$

forma ∞^0

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x}}=(H)=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^0=1$$

forma 1^∞

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln\cos x}=\lim_{x\to0}e^{\frac{\ln\cos x}{x}}=(H)=\lim_{x\to0}e^{-tg\,x}=1$$