Elementi di calcolo infinitesimale

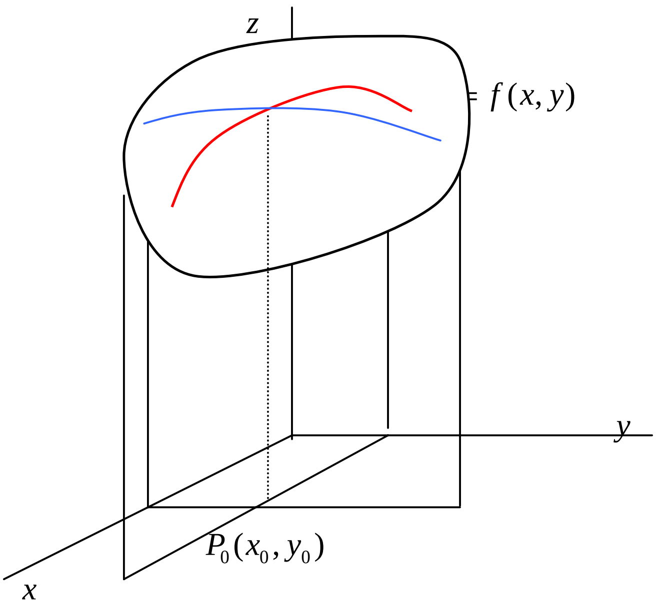
Derivate parziali

Una funzione $z = f(x,y)$ si dice parzialmente derivabile rispetto a x quando, fissato un punto $P_0(x_0, y_0) \in I$ in cui è definita $f(x,y)$ e considerando la funzione nella sola variabile, x questa è derivabile per $x = x_0$. Allo stesso modo si definisce la derivata parziale rispetto a y.

Si ha quindi: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$

Significato geometrico delle derivate parziali

Le derivate parziali rappresentano i coefficienti angolari delle rette tangenti alle curve determinate dall'intersezione della superficie $z = f(x,y)$ con i piani $x = x_0$ e $y = y_0$.



Teorema di Schwartz

Data una funzione $z = f(x,y)$ definita in un insieme I del piano x, y e fissato un punto $P_0(x_0, y_0) \in I$; se la funzione ammette derivate parziali f_x f_y f_{xy} e la f_{xy} è continua in P_0, allora esiste anche f_{yx} e s ha: $f_{xy} = f_{yx}$.

Differenziale totale

Della $f(x,y)$ è $df = f_x dx + f_y dy$

Esempio: se $f(x,y) = x\ sen\, y$, si ha: $df = sen\, y\ dx + x \cos y\ dy$.

Derivate direzionali

Data la funzione $f(P) = f(x, y)$ definita in un insieme I del piano x, y e fissato un punto $P_0(x_0, y_0) \in I$ e un raggio ρ uscente da P_0 avente coseni direttori $\cos\alpha$ e $\cos\beta$, chiamiamo derivata direzionale di $f(P)$ il $\lim_{P \to P_0} \frac{f(P) - f(P)_0}{\overline{PP_0}} = (\frac{\partial f}{\partial r})_{P_0}$.

Massimi e minimi relativi

Data la funzione $f(P) = f(x, y)$ definita in un insieme I del piano x, y diciamo che P_0 è un punto di massimo o di minimo relativo se esiste un intorno di P_0 in cui si ha rispettivamente: $f(P) \leq 0$ oppure $f(P) \geq 0$. Se tali disuguaglianze sono verificate $\forall P \in I$ i punti sono detti di massimo e di minimo assoluti.

Mediante lo sviluppo in serie con la formula di Taylor nell'intorno di P_0, si dimostra che, per stabilire se P_0 è un estremo relativo, si deve considerare il determinante $H(P)$ detto Hessiano della funzione: $H(P) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$

Se $H(P)$ >0 e $\begin{cases} f_{xx} < 0 & massimo \\ f_{xx} > 0 & \min imo \end{cases}$;

Se $H(P)$ <0 né massimo né minimo;

Se $H(P)$ =0 si presenta una forma di indecisione.

Per determinare i massimi e minimi liberi di una funzione $f(P) = f(x, y)$

1. risolvo il sistema: $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$;
2. verifico se il segno di $H(P)$ è positivo;
3. determino il segno di $f_{xx}(P_0)$.

Massimi e minimi vincolati o condizionati

Data la funzione $f(P) = f(x, y)$ definita in un insieme I del piano x, y vogliamo determinare gli estremanti della superficie $z = f(x, y)$ in corrispondenza della curva $\varphi(x, y) = 0 \in I$.

Se $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ e le loro derivate parziali sono continue e P_0 è un punto di massimo o di minimo, per determinare le coordinate di tale punto si considera il sistema formato dal determinante Jacobiano $J(P_0) = \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ \varphi_x & \varphi_y \end{vmatrix}$ uguagliato a zero e dall'equazione $\varphi(x, y) = 0$, ovvero:

$$\begin{cases} f_x\, \varphi_y - f_y \varphi_x = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Per determinare le coordinate del punto P_0 si considera il sistema:

$$\begin{cases} \varphi(x,y)=0 \\ f_x+\lambda\varphi_x=0 \\ f_y+\lambda\varphi_y=0 \end{cases}$$

(costante λ = moltiplicatore di Lagrange).

Queste equazioni possono essere considerate le derivate parziali rispetto a x, y, λ della funzione $z=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ uguagliate a zero.

Esempio

Calcolare i massimi e minimi della funzione $z=e^x+e^y \quad con \quad \varphi=x+y-1$

Poiché $\begin{matrix} f_x=e^x & f_y=e^y \\ \varphi_x=1 & \varphi_y=1 \end{matrix}$ risolviamo il sistema: $\begin{cases} e^x-e^y=0 \\ x=1-y \end{cases}$

Da cui si ricava: $x=y=\frac{1}{2}$

Per stabilire se il punto determinato è un massimo o un minimo determiniamo il segno dell'Hessiano e della f_{xx}:

$$H=\begin{vmatrix} e^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}} \end{vmatrix}=e>0 \qquad f_{xx}=e^{\frac{1}{2}}>0$$

Il punto è quindi un minimo.

Piano tangente ad una superficie

Data la superficie $z=f(x,y)$, l'equazione del piano tangente alla superficie nel punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ è:

$$f_x(x-x_0)+f_y(y-y_0)+f_z(z-z_0)=0$$

Avendo indicato con $f_x \quad f_y \quad f_z$ le derivate parziali calcolate nel punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$.

Lunghezza di un arco di curva

Se le equazioni della curva sono in forma parametrica $x=x(t) \quad y=y(t) \quad z=z(t)$

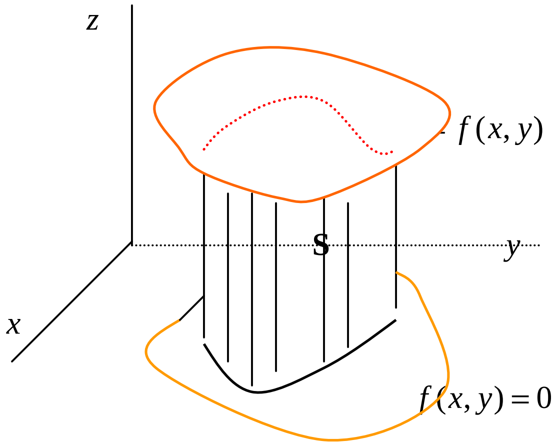
La lunghezza della curva Γ è data da: $$L=\int_a^b\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt$$

Se l'equazione della curva è nella forma $y=f(x)$ $$L=\int_a^b\sqrt{1+f_x^{\,2}}\,dx$$

Significato geometrico dell'integrale curvilineo

L'integrale curvilineo esteso alla curva Γ: $\int_{\gamma} f(x, y)\, ds$

rappresenta l'area della superficie S limitata dalla curva Γ e dalla superficie $z = f(x, y)$ avente le direttrici parallele all'asse z.



Volume di un solido di rotazione

Sia $y = f(x)$ una funzione continua definita nell'intervallo $[a;b]$. Il volume del solido generato dalla rotazione completa della curva intorno all'asse x è data da $V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$

Se la curva ruota intorno all'asse y il volume sarà: $V = \pi \int_c^d f^2(y)\, dy$.