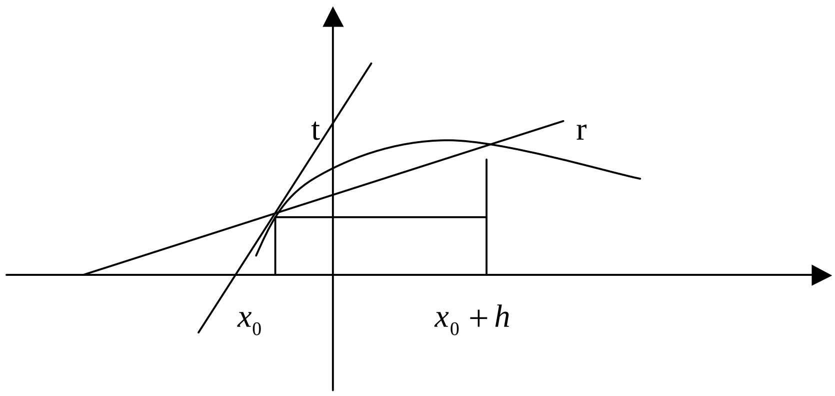
DERIVATE

Sia $y = f(x)$ una funzione reale definita nell'intervallo $[a;b]$. Se x_0 e $x_0 + h$ sono due punti del suo dominio, si chiama incremento della funzione il valore $\Delta_f = f(x_0+h) - f(x_0)$.
Si chiama rapporto incrementale della $f(x)$ relativo al punto x_0 e all'incremento h il rapporto: $\frac{\Delta_f}{\Delta_x}$ cioè $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad (h \neq 0)$.
Se esiste finito il limite di tale rapporto per $h \to 0$, si dice che la funzione è derivabile in x_0 e il valore di tale limite si chiama derivata della funzione nel punto x_0 e scriveremo: $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) \quad (h \neq 0)$.
Condizione necessaria ma non sufficiente perché una funzione sia derivabile in x_0 è che essa sia continua in tale punto.
Viceversa, se una funzione è derivabile essa è continua.
Se $f(x)$ è derivabile in ogni punto di $[a;b]$ la funzione si dice derivabile.
Se $f(x)$ è derivabile in x_0, in tale punto la derivata destra è uguale alla derivata sinistra.
Ovvero $\lim_{x\to x_0^-} f'(x) = \lim_{x\to x_0+} f'(x)$.

Significato geometrico della derivata



Osservando la figura e ricordando il significato di coefficiente angolare della retta r passante per i punti $P_0(x_0; f(x_0)) \quad e \quad P(x_0+h\,; f(x_0+h))$ si ha: $m = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
Facendo tendere a zero l'incremento h della variabile indipendente il punto P, muovendosi sulla curva tenderà a P_0 e la retta r si porterà alla posizione limite t, ovvero risulterà tangente alla curva nel punto di ascissa x_0.
Per la definizione di derivata si può scrivere: $m_t = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$. La derivata in x_0 è quindi il valore del coefficiente angolare della retta tangente in x_0, cioè la tangente dell'angolo che la retta tangente forma con il semiasse positivo delle ascisse.
L'equazione della retta tangente sarà: $y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)$.

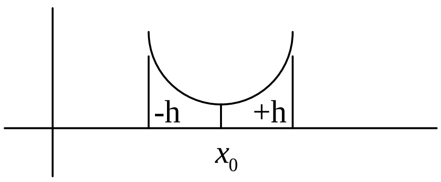
Osservazioni
Poiché si dimostra che nei punti relativi di una funzione si ha: $f^{'}(x_0) = 0$. (vedi teorema di Fermat)
Se $m_t = f^{'}(x_0) = 0$ la retta tangente è parallela all'asse x.

Inoltre affinché una funzione sia derivabile in x_0 occorre che sia verificata la seguente uguaglianza
$\lim_{h \to x_0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.
Come si vedrà in seguito, in un **punto angoloso** la funzione pur essendo continua non è derivabile.
Se i suddetti limiti tendono rispettivamente a « ∞ la curva presenta in x_0 una **cuspide** rivolta verso il basso o verso l'alto.
Se entrambi i limiti tendono a ∞ la curva ha un punto di flesso in x_0. (vedi " Punti critici ").

Teorema di Fermat

Negli estremi relativi di una funzione derivabile interni al dominio la derivata è nulla

Sappiamo che se x_0 è un punto di minimo relativo di una funzione $f(x)$ $\exists I_{x_0} \in D_f : \forall x \in I_{x_o}$
$f(x) \geq f(x_0)$, ossia $f(x) - f(x_0) \geq 0$



Scelto un incremento $h \neq 0$ in modo che $x_0 + h \in I_{x_0}$, consideriamo i rapporti incrementali destro e sinistro della funzione
$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0$
$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{-h} \geq 0$
E, considerando il limite per h che tende a zero, otteniamo:

$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f_+{}'(x_0) \geq 0$ (1)
$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f_-{}'(x_0) \leq 0$. (2)

Poiché per ipotesi la $f(x)$ è derivabile in x_0 devono valere contemporaneamente la (1) e la (2). Quindi, necessariamente, deve essere $f'(x_0) = 0$.
Procedendo in modo analogo possiamo dimostrare che in un punto di massimo relativo $f'(x_0) = 0$.

Teorema di Rolle

Sia $y = f(x)$ una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a;b]$. Se essa è derivabile in $]a;b[$ e assume valori uguali agli estremi $f(a) = f(b)$, $\exists x_0 \in]a;b[: f'(x_0) = 0.$

Infatti, essendo la funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a;b]$, per il teorema di Weierstrass ammette massimo (M) e minimo (m). Si possono presentare due casi:

1) M = m, la f (x) risulta costante e quindi $f'(x) = 0 \;\; \forall \;\; x \in]a;b[$

2) $M \neq m$, la funzione non è costante.
Indicando con x_1 e x_2 le ascisse di m ed M. Per le condizioni dettate dal teorema $(f(a) = f(b))$, almeno una di esse sarà interna ad $[a,b]$. Supponiamo che sia $x_2 \in]a,b[$. Scegliendo un valore $h > 0$ in modo che $x_2 + h \in]a,b[$. Segue che:

$f(x_2 + h) - f(x_2) \leq 0$ (vedi figura)

Dividendo la disuguaglianza per h si ricava (come già visto nel teorema di Fermat):

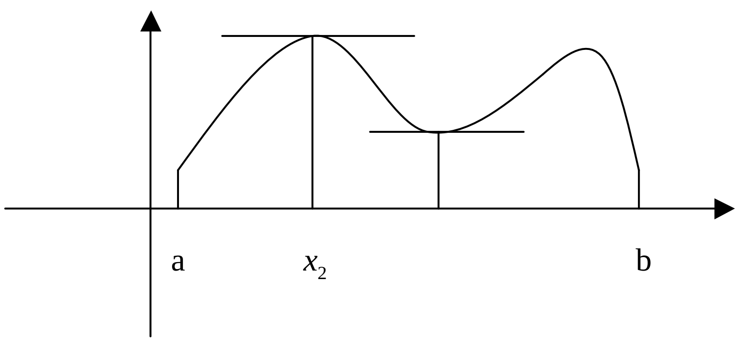
per $h > 0$: $\dfrac{f(x_2 + h) - f(x_2)}{h} \leq 0$

per $h < 0$ $\dfrac{f(x_2 + h) - f(x_2)}{-h} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x_2 + h) - f(x_2)}{h} \geq 0$

Considerando il limite di detti rapporti incrementali, rispettivamente destro e sinistro, per $h \to 0$, si ha: $f_+'(x_2) \leq 0$ e $f_-'(x_2) \geq 0$. Poiché la funzione è derivabile in ogni punto di $]a,b[$, deve essere $f'_+ = f'_-$. Quindi, necessariamente, deve essere $f'(x_2) = 0.$

Significato geometrico del teorema di Rolle

Il grafico della funzione possiede almeno un punto in cui la tangente risulta parallela all'asse delle ascisse.



Teorema di Lagrange o del valor medio

Sia $y = f(x)$ una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a;b]$. Se essa è derivabile in $]a;b[$, esiste almeno un punto x_0 in cui si ha: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$.

Per dimostrare il teorema consideriamo la funzione ausiliaria $\varphi(x) = f(x) - k\,x \quad (k \in \text{ß})$
Dopo aver osservato che tale funzione è continua in $[a;b]$ e derivabile in $]a;b[$ perché combinazione lineare di due funzioni continue e derivabili, determiniamo il valore di k affinché si abbia $\varphi(a) = \varphi(b)$ e sia quindi applicabile il teorema di Rolle.

Essendo $\varphi(a) = f(a) - k\,a; \qquad \varphi(b) = f(b) - k\,b$

si ottiene: $f(a) - k\,a = f(b) - k\,b$ da cui $\quad k = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

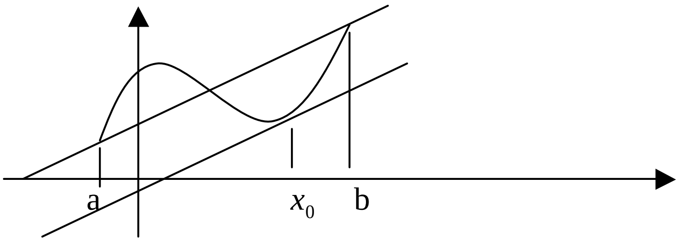
Per tale valore di k è quindi possibile applicare alla funzione $\varphi(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$ il teorema di Rolle.

Poiché $\exists x_0 \in\,]a;b[\, : \varphi'(x_0) = 0$ si ha: $\varphi'(x_0) = f'(x_0) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ ovvero:

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Significato del teorema di Lagrange

Il grafico della funzione possiede almeno un punto x_0 in cui la tangente è parallela alla retta passante per gli estremi dell'intervallo $[a;b]$.



Il teorema di Lagrange permette di affermare che una funzione continua e derivabile è crescente (decrescente) quando $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ $\forall \; x \in D_f$.

Esempio: $f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \le x \le 1 \\ x^2 + x - 1 & 1 < x \le 2 \end{cases}$ Poiché $f(0) = 0 \quad f(2) = 5$ e $b - a = 2$ si ha:

1. $\dfrac{5}{2} = 3c^2$ da cui si ricava: $x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{6}}$. Di queste radici solo la positiva appartiene ad $[a;b]$.
2. $\dfrac{5}{2} = 2x + 1$ dalla quale si ha $x = \dfrac{3}{4}$ che non appartiene ad $[a;b]$.

Teorema di Cauchy

Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ continue nell'intervallo chiuso e limitato $[a;b]$, se esse sono derivabili in $]a;b[$ e $g'(x) \neq 0$, esiste almeno un punto x_0 in cui si ha: $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Per dimostrare il teorema consideriamo la funzione ausiliaria $\varphi(x) = f(x) - k\,g(x)$ $(k \in$ ß$)$

Dopo aver osservato che tale funzione è continua in $[a;b]$ e derivabile in $]a;b[$ perché combinazione lineare di due funzioni continue e derivabili, determiniamo il valore di k affinché si abbia: $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Essendo $\varphi(a) = f(a) - k\,g(a);$ e $\varphi(b) = f(b) - k\,g(b)$

uguagliando otteniamo: $f(a) - k\,g(a) = f(b) - k\,g(b)$ da cui $k = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

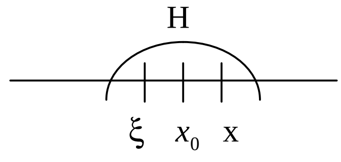
Per tale valore di k è quindi possibile applicare alla funzione $\varphi(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} g(x)$ il teorema di Rolle.

Poiché $\exists x_0 \in]a;b[: \varphi'(x_0) = 0$ si ha: $\varphi'(x_0) = f'(x_0) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} g'(x_0) = 0$ ovvero

$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

Teorema di De L'Hospital

- Forma $\dfrac{\infty}{\infty}$ Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono continue nell'intervallo chiuso $[a;b]$ con $f(\xi) = \infty$ e $g(\xi) = \infty$, e sono derivabili in $]a;b[$,escluso al più il punto ξ con $g'(x) \neq 0$, se esiste ed è finito il $\lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ si ha: $\lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.
- Forma $\dfrac{0}{0}$ Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono continue nell'intervallo chiuso $[a;b]$ con $f(\xi) = 0$ e $g(\xi) = 0$, e sono derivabili in $]a;b[$, escluso al più il punto ξ con $g'(x) \neq 0$, se esiste ed è finito il $\lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ si ha: $\lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.



Per dimostrare il teorema consideriamo nell'intorno H di x_0 un punto ξ e applichiamo il teorema di Cauchy alle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ nell'intervallo $[\xi, x]$.

Si ha: $\dfrac{f(x)-f(\xi)}{g(x)-g(\xi)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ ed essendo per ipotesi: $f(\xi) = 0$ e $g(\xi) = 0$, avremo:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \qquad (1)$$

Inoltre, poiché esiste il $\lim\limits_{x\to\xi}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$; al tendere di x a ξ, anche x_0 tende a ξ. Quindi potremo scrivere: $\lim\limits_{x\to\xi}\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\lim\limits_{x\to\xi}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ e per la (1) segue: $\lim\limits_{x\to\xi}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\xi}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

- Forma $\dfrac{\infty}{\infty}$ Siano $f(x)$ *e* $g(x)$ due funzioni derivabili in $]a;b[$, escluso al più il punto x_0 con $g'(x)\neq 0 \ \ \forall x\in\,]a;b[$. Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ *e* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$ ed esiste $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, si ha: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Il teorema vale anche se le funzioni sono derivabili in un intervallo illimitato e tendono ad ∞ per x tendente ad ∞.

- Forma $0\cdot\infty$ Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ *e* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$ possiamo ricondurci alla forma $\dfrac{\infty}{\infty}$ o $\dfrac{0}{0}$ considerando il $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ o il $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$.
- Forma $\infty-\infty$ In questo caso si deve trasformare la differenza delle funzioni in un prodotto o in un quoziente.
- Forme 0^0 1^∞ ∞^0 Queste forme si presentano quando i limiti sono del tipo: $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}$.

  In questi casi occorre trasformare la forma del limite assegnato mediante l'identità: $[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$ ed effettuando l'operazione di limite all'esponente.

<u>Esempi</u>

$\dfrac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1} 3x^2=3$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sen} x=0$.

$\dfrac{\infty}{\infty}$: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\log x}{ctg\, x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\operatorname{sen} x\left(-\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{-\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}}=0$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2}=+\infty$

$0\cdot\infty$: $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot ctg\, x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{ctg\, x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=1$

0^0 $\quad 1^\infty$ $\quad \infty^0$

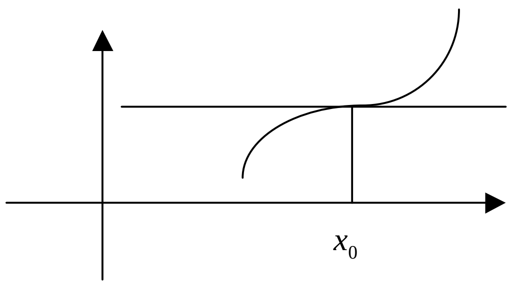
$\lim\limits_{x\to 0^+}(\operatorname{sen} x)^{tg\, x}=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{tg\, x\ln\operatorname{sen} x}$ poiché $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\operatorname{sen} x}{\frac{1}{tg\, x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{ctg\, x}{-\dfrac{1+tg^2 x}{tg^2 x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{tg\, x}{-1-tg^2 x}=0$ il limite della funzione assegnata è uguale a 1.

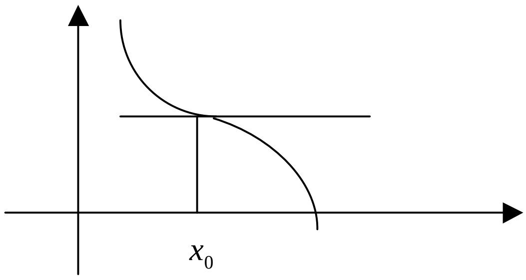
Massimi, minimi e flessi mediante l'uso delle derivate successive

Se $y = f(x)$ è una funzione derivabile in $]a;b[$ e sono verificate le seguenti condizioni:

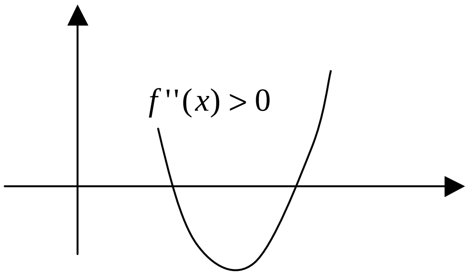
$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots\dots\dots = f^{n-1}(x_0) = 0 \quad e \quad f^n(x_0) \neq 0$, si possono presentare due casi:

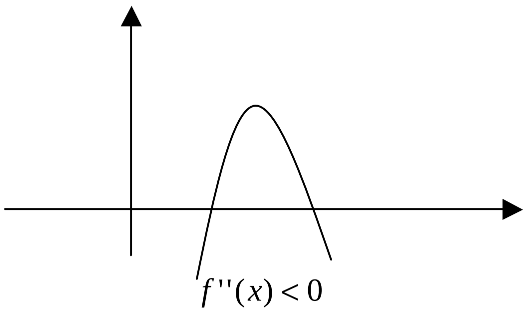
1. L'ordine n della derivata è pari. Se $f^n(x_0) > 0 \quad (f^n(x_0) < 0)$ il punto x_0 è un minimo (massimo).
2. L'ordine n della derivata è dispari. Se $f^n(x_0) > 0 \quad (f^n(x_0) < 0)$ il punto x_0 è un flesso a tangente orizzontale ascendente (discendente).





Com'è facile osservare, nei punti di flesso a tangente orizzontale la funzione cambia concavità. E' quindi possibile stabilire i flessi se si conoscono gli intervalli in cui la concavità è rivolta verso l'alto e quelli in cui la concavità è rivolta verso il basso.
Per determinare detti intervalli basta studiare il segno della derivata seconda della funzione.



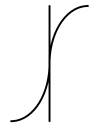


Punti critici

Sono i punti in cui la derivata prima è nulla o non esiste. Un punto x_0 è detto **stazionario** se $f'(x_0) = 0$.

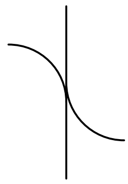
1. Se $f'(x_0) = 0$ il punto è un estremante;
2. Se $f'(x_0)$ non esiste, pur essendo la funzione continua in x_0, si possono avere i seguenti casi:

a) $\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} f'(x) = +\infty$

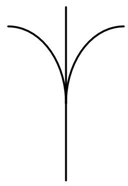


il punto x_0 è un punto di flesso a tangente verticale ascendente;

b) $\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} f'(x) = -\infty$

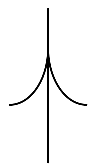


il punto x_0 è un punto di flesso a tangente verticale discendente;



c) $\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} f'(x) = \pm\infty$

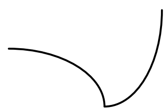
il punto x_0 è una cuspide a tangente verticale rivolta verso il basso



d) $\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} f'(x) = \mp\infty$

il punto x_0 è una cuspide a tangente verticale rivolta verso l'alto.

e) $\lim\limits_{h \to x_0^{-}} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \neq \lim\limits_{x \to x_0^{+}} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$



il punto x_0 è un punto angoloso.

Differenziale

Sia $y = f(x)$ una funzione derivabile nell'intervallo $[a;b]$.e sia x_0 un punto di tale intervallo. Se assegniamo a x_0 un incremento Δx in modo che $(x_0 + \Delta x) \in]a;b[$ la funzione subisce l'incremento $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Poiché la funzione è derivabile si ha: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = f(x_0) - f(x_0) = 0$

Quindi, l'incremento della variabile e l'incremento della funzione sono infinitesimi dello stesso ordine.

Essendo $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ possiamo affermare che:

gli incrementi Δy e Δx sono infinitesimi dello stesso ordine quando $f'(x_0) \neq 0$

l'incremento Δy è un infinitesimo di ordine superiore a Δx quando $f'(x_0)=0$.

Quindi $\quad \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon(\Delta x) \quad \left(\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0\right)$

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x \qquad (1)$$

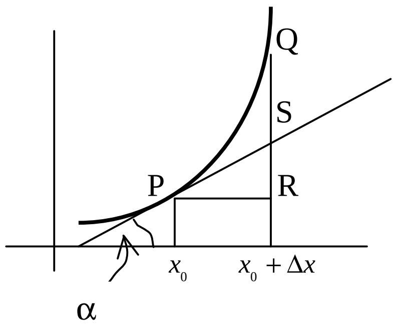
Il prodotto $\quad df(x) = f'(x_0) \cdot \Delta x \qquad (2)$

si chiama **differenziale della funzione** nel punto x_0.
Possiamo quindi dare la seguente

Definizione
Il differenziale di una funzione, in un punto in cui essa è derivabile, è il prodotto della derivata della funzione in tale punto per l'incremento della variabile indipendente.

Se, in particolare, consideriamo la funzione $f(x)=x$ si ha $d\,f(x) = dx = 1 \cdot \Delta x$. Quindi, l'incremento della variabile indipendente è uguale al suo differenziale e la (2) prende la forma: $df(x) = f'(x_0) \cdot dx \quad \Rightarrow \left(\dfrac{dy}{dx} = f'(x_0)\right)$.
Riprendendo in considerazione la (1) osserviamo che:
$\Delta y - f'(x_0) \cdot \Delta x = \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x$ ovvero
$\Delta y - df(x) = \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x$
Poiché il $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0 \quad \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x$ è un infinitesimo di ordine superiore a Δx possiamo affermare che l'incremento della funzione differisce dal suo differenziale per una quantità infinitesima di ordine superiore all'incremento della variabile.

Significato geometrico del differenziale



$$\overline{RS} = \overline{PR} \cdot tg\,\alpha = \Delta x \cdot f'(x_0) = dy$$
$$\overline{RQ} = \Delta y \quad \Rightarrow \quad \overline{SQ} = \Delta y - dy = \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x$$