Equazioni differenziali

Definiamo equazione differenziale di ordine n un'equazione che ha per incognita una funzione $y(x)$ e che stabilisce un legame tra la $y(x)$ con le sue derivate fino all'ordine n e con altre funzioni della variabile x .E' quindi una funzione del tipo:
$f\left[x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)\right]=0$ definita in un certo insieme I dello spazio ad n dimensioni.
Diciamo che un'equazione differenziale è **normale** se è del tipo $y^{(n)}=F\left[x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x)\right]$;
diciamo che è **ordinaria** se la funzione $y(x)$ dipende solo dalla variabile x.
Chiamiamo soluzione o **curva integrale** dell'equazione differenziale ogni funzione $\overline{y}(x)$ che possiede derivate dei primi n ordini e sia tale che $\forall P \in I$ risulti: $f\left[x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x), ..., \overline{y}^{(n)}(x)\right]=0$
Dal punto di vista geometrico, un'equazione differenziale è un campo di direzioni
Se ad esempio è del tipo $f\left[x, y(x), y'(x)\right]=0$, definita in un certo insieme I dello spazio a tre dimensioni, essa assocerà ad ogni punto $P_0 \in I$, la $y'(x)$ che rappresenta il coefficiente angolare del vettore infinitesimo uscente da P_0 e tangente ad una delle curve integrali $\overline{y}(x)$ soluzioni dell'equazione.

Teorema di Cauchy

Sia $f(x, y)$ una funzione definita nel dominio $D:\{a \le x \le b \quad c \le y \le d\}$, continua in D insieme alla sua derivata prima rispetto a y e sia $P_0(x_0, y_0)$ un generico punto interno a D,
in tali condizioni l'equazione differenziale in forma normale $y'=F\left[x, y(x)\right]$ ammette una ed una sola soluzione $y=\overline{y}(x)$ definita in un intorno di P_0, soddisfacente la condizione $\overline{y}(x_0)=y_0$.
E' quindi evidente che un'equazione differenziale possiede infinite curve integrali e per ogni punto interno a D ne passa una soltanto.

Equazioni differenziali a variabili separate o separabili

- $f(x)dx+\varphi(y)dy=0$ è un'equazione a **variabili separate** che, integrata, fornisce l'integrale generale $y=\overline{y}(x)$.

  Esempio risolvere l'equazione: $x\cos x\, dx - y\, dy = 0$

  $\int x \cos x\, dx - \int y\, dy = c$

  $x\, sen\, x - \cos x - \frac{1}{2}y^2 = c \qquad\qquad y=\sqrt{2(x\, sen\, x - \cos x - c)}$.

- Un'equazione a **variabili separabili** ha la forma $M(x)\,N(y)\,dx + P(x)\,Q(y)\,dy = 0$.
  Per risolverla viene trasformata in un'equazione a variabili separate dividendo per $P(x)\,N(y)$.
  Si ha infatti: $\frac{M(x)}{P(x)}dx+\frac{Q(y)}{N(y)}dy=0$.

Esempio risolvere l'equazione: $(1-x)\,y\,dx+(1+y)\,x\,dy=0$.

Dividendo per xy si ottiene: $\int\frac{1-x}{x}dx+\int\frac{1+y}{y}dy=c$ da cui s ottiene:

$\ln xy-x+y=c$.

- L'equazione differenziale **omogenea del primo ordine** ha la forma: $y'=\frac{N(x,y)}{D(x,y)}$ $con\ D(x,y)\neq 0$ $N(x,y)$ e $D(x,y)$ polinomi omogenei aventi lo stesso grado di omogeneità α. Per risolverla si pone: $\frac{y}{x}=t$, si ricava $dy=t\,dx+x\,dt$ e, sostituendo nell'equazione assegnata, si ottiene: $\frac{t\,dx+x\,dt}{dx}=f(t)$ che è un'equazione a variabili separabili.

Esempio risolvere l'equazione: $s'=\frac{s-t}{t}$

Ponendo $\frac{s}{t}=u$ si ha: $ds=u\,dt+t\,du$, quindi $u\,dt+t\,du=(u-1)\,dt$ da cui

$t\,du+dt=0$ $\quad\int\frac{1}{t}dt+\int du=c$ $\quad\ln t+u=c$ $\quad s=c\,t-t\,\ln t$.

- Equazione **differenziale lineare del primo ordine a coefficienti variabili**.
è un polinomio di primo grado nelle variabili y, y' ed è della forma:
$a(x)\,y'+b(x)\,y+c(x)=0$.
Dividendo per $a(x)$ si ottiene: $\quad y'=\alpha(x)\,y+\beta(x)$ (1)

$y'-\alpha(x)\,y=\beta(x)$ e, moltiplicando ambo i membri per $e^{-\int\alpha(x)dx}$, si ha:

$$y'e^{-\int\alpha(x)dx}-\alpha(x)\,y\,e^{-\int\alpha(x)dx}=\beta(x)\,e^{-\int\alpha(x)dx}. \qquad (2)$$

Considerando adesso la derivata del prodotto: $y\,e^{-A(x)}$

$\left[y\,e^{-A(x)}\right]'=y'\,e^{-A(x)}-A'(x)\,y\,e^{-A(x)}$

si osserva che per $A(x)=\int\alpha(x)\,dx$ essa rappresenta il primo membro della (2).

Quindi si può scrivere: $\left[y\,e^{-A(x)}\right]'=\beta(x)\,e^{-\int\alpha(x)dx}$. E, integrando, si ha:

$y\,e^{-\int\alpha(x)dx}=\int\beta(x)\,e^{-\int\alpha(x)dx}dx+k$ e infine

$$\boxed{y=e^{\int\alpha(x)dx}\left(\int\beta(x)\,e^{-\int\alpha(x)dx}dx+k\right)}$$

Che è l'integrale generale dell'equazione differenziale.

Esempio risolvere l'equazione $\quad y'+y-x^3=0$

$y'=-y+x^3$ osservando che: $\begin{matrix}\alpha(x)=-1\\ \beta(x)=x^3\end{matrix}$ si ha: $y=e^{-\int dx}\left(\int x^3\,e^{\int dx}dx+k\right)$

da cui $y = e^{-x}(\int x^3 e^x dx + k)$

risolvendo per parti $\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x$ si ottiene:

$y = x^3 - 3x^2 + 6x - 6 + k e^{-x}$

Lo stesso procedimento può essere applicato per le equazioni **differenziali lineari del primo ordine a coefficienti costanti.**

Esempio l'integrale dell'equazione $y' = a\,y + b$

è: $y = e^{\int a\,dx}(\int b\,e^{-\int a\,dx} dx + k)$ da cui $y = e^{ax}(\int -\frac{b}{a} e^{-ax} dx + k)$.

Equazione di Bernoulli

E' un'equazione del tipo $y' = a(x)\,y + b(x)\,y^n$

Per risolverla dividiamo ambo i membri per y^n e otteniamo: $y'\,y^{-n} = a(x)\,y^{1-n} + b(x)$.

Posto $z = y^{1-n}$, ricaviamo: $z' = (1-n)y^{-n}y'$ *da cui* $y'\,y^{-n} = \frac{z'}{1-n}$, quindi:

$z' = (1-n)\left[a(x)\,z + b(x)\right]$ che è un'equazione lineare in z.

Esempio risolvere l'equazione $y' = xy^3 - xy$

Dividendo per y^3 si ha: $y'\,y^{-3} = x - xy^{-2}$ e, posto $z = y^{-2}$, si ricava:

$z' = -2\,y^{-3}\,y'$ e quindi l'equazione lineare: $z' = 2\,x\,z - 2\,x$

Essendo: $\begin{array}{l} a(x) = 2x \\ b(x) = -2x \end{array}$ possiamo scrivere: $z = e^{\int 2x\,dx}\left(\int -2x\,e^{-\int 2x\,dx} dx + k\right)$ da cui:

$z = e^x\left(4x\,e^{-x} - 4e^{-x} + k\right)$ $z = 4x - 4 + ke^x$ e infine: $y = \frac{1}{\sqrt{4x + ke^x - 4}}$.

Equazioni differenziali lineari omogenee del secondo ordine

Sono equazioni del tipo $F(x, y, y', y'') = 0$

Si dice che l'equazione è in forma normale quando può essere scritta: $y'' = f(x, y, y')$.

Secondo quanto afferma il **teorema di Cauchy**

L'integrale generale di un'equazione differenziale del secondo ordine è una funzione $y = \varphi(x)$ contenente due costanti arbitrarie.

Consideriamo l'equazione differenziale $y'' + \alpha y' + \beta y = 0$ con $\alpha \vee b \in \mathbb{R}$.

La sua equazione caratteristica è: $\lambda^2 + \alpha\lambda + b = 0$.

Si possono presentare i seguenti casi:

1. $\Delta > 0$ $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ l'integrale generale è: $y = c_1\,e^{\lambda_1 x} + c_2\,e^{\lambda_2 x}$.

2. $\Delta = 0$ $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ " " ": $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}$
3. $\Delta < 0$ $\lambda_1 = a + ib$; $\lambda_2 = a - ib$ l'integrale generale è: $y = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \, sen \, bx$

Esempi

1) $y'' - 10y' + 9y = 0$ $\lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0$ $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 9$ $y = c_1 e^{9x} + c_2 e^{x}$

2) $y'' - 6y' + 9y = 0$ $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ $y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$

3) $y'' - 2y' + 26y = 0$ $\lambda^2 - 2\lambda + 26 = 0$ $\lambda_1 = 1 - 5i$ $\lambda_2 = 1 + 5i$ $y = c_1 e^{x} \cos 5x + c_2 e^{x} \, sen \, 5x$.

Equazioni differenziali lineari non omogenee del secondo ordine

Sono equazioni del tipo $F(x, y, y', y'') = \varphi(x)$

Per determinare l'integrale generale di un'equazione differenziale non omogenea operiamo nel seguente modo:

- calcoliamo l'integrale generale $\overline{y}(x)$ dell'equazione omogenea associata;
- determiniamo un integrale particolare $\overline{\psi}(x)$ dell'equazione non omogenea mediante il procedimento di Lagrange detto "della variazione delle costanti arbitrarie" (sistema formato da $\overline{y}(x) = 0$ e $\overline{y}'(x) = \varphi(x)$).
- sommiamo i due integrali trovati.

Esempio

Risolvere l'equazione $y'' - 3y + 2y = x$

- L'equazione omogenea associata $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ ha come soluzioni: $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 2$
  quindi $\overline{y}(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$. (1)
- Considerando le costanti variabili si ha: $\begin{cases} e^{x} \, c_1'(x) + e^{2x} \, c_2'(x) = 0 \\ e^{x} \, c_1'(x) + 2e^{2x} \, c_2'(x) = x \end{cases}$ da cui ricaviamo:

$c_1' = -x e^{-x}$ $c_2' = x e^{-2x}$ e, integrando: $c_1 = x e^{-x} + e^{-x}$ $c_2 = -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x}$

e, assegnando tali valori delle costanti nella (1) otteniamo:

$$\overline{\psi}(x) = x + 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

Quindi, $$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$$