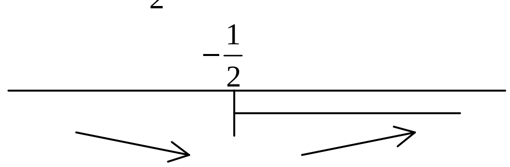
Studiare il grafico della funzione $f(x) = a e^{2x} + b e^{-2x} - x e^{-2x}$ sapendo che ha come asintoto orizzontale l'asse $x$ e che nel punto di intersezione con l'asse $y$ la retta tangente alla curva è parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Dovendo essere $y = 0$ l'asintoto orizzontale, occorre che risulti $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ ossia
$\lim_{x\to\infty}\left( a e^{2x} + \frac{b}{e^{2x}} - \frac{x}{e^{2x}} \right) = 0$ Questa uguaglianza è valida solo quando:
$a = 0$. (1)
Ricordando che il coefficiente angolare della retta tangente alla curva di equazione $y = f(x)$ nel punto $x_0$ è dato da $m = f'(x_0)$ si ha: $m = \left[ 2a e^{2x} - 2b e^{-2x} - e^{-2x} + 2x e^{-2x} \right]_{x=0} = 2a - 2b - 1$
Per il parallelismo tra tale retta e la bisettrice $y = x$ occorre che $m = 1$ ovvero
$2a - 2b - 1 = 1$ (2)
Dalle condizioni (1) e (2) si ricava $a = 0; \quad b = -1$.
Quindi, La funzione da studiare ha equazione: $y = -e^{-2x}(x+1)$.

- Dominio: $D_f = \mathbb{R}$
- Segno e intersezioni con gli assi: $f(x) \geq 0$ quando $x + 1 \leq 0 \iff x \leq -1$
  Inoltre $x = -1$ per $x = 0$
- Condizioni agli estremi dell'insieme di esistenza: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
- Ricerca degli estremi relativi $y' = 2e^{-2x}(x+1) - e^{-2x} \iff y' = e^{-2x}(2x+1)$
- Ricerca dei punti di flesso

  $y' > 0$ per $x > -\frac{1}{2}$




  la funzione ha un minimo relativo nel punto $P\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}e\right)$

- Ricerca dei punti di flesso
  $y'' = -2e^{-2x}(1+2x) + 2e^{-2x} \iff y'' = -4x e^{-2x}$
  $y'' > 0$ per $x < 0$

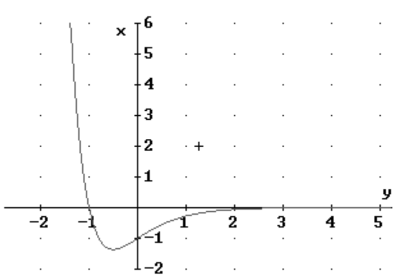


grafico della funzione