Tracciare il grafico della seguente funzione $y=\frac{|x-3|}{x-1}\cdot e^{|x-1|}$

- L'equazione perde di significato per $x=1$ Quindi $D_f =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.
- Poiché risulta: $|x-3|=x-3 \quad per \quad x\geq 3 \quad e \quad |x-3|=-x+3 \quad per \quad x<3$
  $|x-1|=x-1 \quad per \quad x>1 \quad e \quad |x-1|=-x+1 \quad per \quad x<1$ la funzione data equivale alle seguenti tre funzioni: $y=\begin{cases} \frac{3-x}{x-1}e^{1-x} & per \quad x<1 \\ \frac{3-x}{x-1}e^{x-1} & per \quad 1<x<3 \\ \frac{x-3}{x-1}e^{x-1} & per \quad x\geq 3 \end{cases}$

Studiamo la prima.

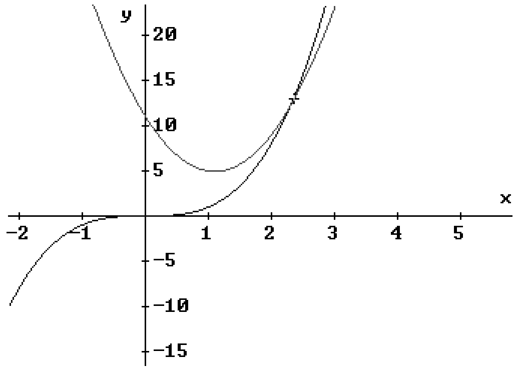
Essendo $\frac{3-x}{x-1}e^{1-x}<0 \quad per \quad x<1$ il grafico giace sempre nel semipiano negativo.
Osserviamo inoltre che per $x=0 \ \rightarrow \ y=-3e$, quindi $P(0;-3e)$ è il punto in cui la curva interseca l'asse y.

- Per conoscere il comportamento della funzione agli estremi dell'insieme di esistenza calcoliamo: $\lim_{x\to-\infty} f_1(x)=-\infty;$ $\quad \lim_{x\to 1^-} f_1(x)=-\infty$ e $\lim_{x\to-\infty}\frac{f_1(x)}{x}=+\infty$.
  Dai risultati ottenuti possiamo affermare che la funzione ha solo l'asintoto verticale di equazione $x=1$.
- Ricerca degli eventuali estremi relativi con il metodo della derivata prima: Poiché $y'=e^{1-x}\left(\frac{-2}{(x-1)^2}-\frac{3-x}{x-1}\right)\Leftrightarrow y'=e^{1-x}\cdot\frac{x^2-4x+1}{(x-1)^2}$ la funzione risulta positiva per $x<2-\sqrt{3}$ quindi $P\left(2-\sqrt{3};-(2+\sqrt{3})e^{\sqrt{3}-1}\right)$ è un punto di massimo.

Studiamo la seconda

Essendo $\frac{3-x}{x-1}e^{x-1}>0$ quando $\frac{3-x}{x-1}>0 \ \rightarrow \ 1<x<3$, la curva giace sempre nel semipiano positivo

- Poiché $\lim_{x\to 1^+} f_2(x)=+\infty;$ $\lim_{x\to 3^-} f_2(x)=0;$ la curva possiede l'asintoto verticale $x=1$ e interseca l'asse delle ascisse nel punto $Q(3;0)$.
- Osservando che $y'=e^{x-1}\left(\frac{-2}{(x-1)^2}+\frac{3-x}{x-1}\right)\Leftrightarrow y'=e^{x-1}\cdot\frac{-x^2+4x-5}{(x-1)^2}<0$ la funzione è sempre decrescente.
  Per determinare i punti di flesso studiamo il segno di $y''=e^{x-1}(x-1)\left(\frac{-x^3+5x^2-11x+11}{(x-1)^4}\right)$
  Questa è positiva quando $5x^2-11x+11>x^3$
  Posto $y=x^3$ risolviamo graficamente la disequazione $y_{parabola}>y_{cubica}$ considerando le curve di equazione $y=x^3 \quad e \quad y=5x^2-11x+11$



dal grafico deduciamo che $y_{parabola} > y_{cubica}$ per $x < \alpha \quad (2,24 < \alpha < 2,34)$ (con il programma Derive)

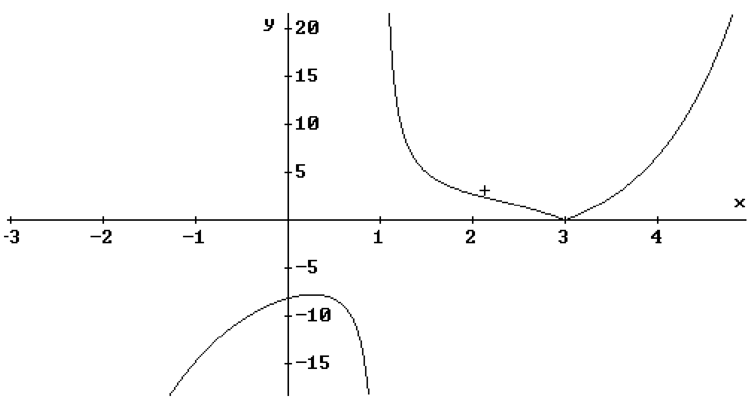
Quindi, la seconda curva presenta il flesso $F(\alpha; f(\alpha))$

Studiamo la terza

Essendo $\frac{x-3}{x-1}e^{x-1} > 0$ per $x > 3$ la funzione è sempre positiva e interseca l'asse delle ascisse nel punto $Q(3;0)$.

- Poiché $\lim_{x\to+\infty} f_3(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_3(x)}{x} = +\infty$ la funzione non ha asintoti.
- Osservando che $y' = \frac{x^2-4x+3}{(x-1)^2}e^{x-1} \quad y' > 0 \quad \forall x \in D_{f_3}$, la funzione è sempre crescente.

Riunendo i risultati fin qui ottenuti otteniamo il grafico della funzione assegnata:



notiamo che il punto $Q(3;0)$ e un punto angoloso, infatti: $\lim_{x\to3^+} \frac{x^2-4x+3}{(x-1)^2}e^{x-1} \neq \lim_{x\to3^-} \frac{-x^2+4x-5}{(x-1)^2}e^{x-1}$.