Studiare la seguente funzione goniometrica $y = arcsen\frac{1-x^2}{1+x^2}$

- Dominio: la funzione esiste quando $-1 \le \frac{1-x^2}{1+x^2} \le 1 \iff \begin{cases} \frac{1-x^2}{1+x^2} \le 1 \\ \frac{1-x^2}{1+x^2} \ge -1 \end{cases}$ da cui si ricava:

$$\begin{cases} \frac{2x^2}{1+x^2} \ge 0 \\ \frac{2x^2}{1+x^2} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

- Segno della funzione. Dalla disequazione $\frac{1-x^2}{1+x^2} > 0$ ricaviamo che

$f(x) > 0 \quad]-\infty; -1[\vee]1; +\infty[$

$f(x) = 0 \quad x = \pm 1$

$f(x) < 0 \quad]-1; 1[$

Inoltre, per $x = 0 \quad y = \frac{\pi}{2}$

- Comportamento della funzione agli estremi dell'insieme di esistenza.

Poiché il $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = arcsen(-1) = -\frac{\pi}{2}$ la funzione presenta l'asintoto orizzontale di equazione $y = -\frac{\pi}{2}$

- Ricerca degli estremi relativi mediante il segno della derivata prima:

essendo $y' = \frac{-2x}{|x|(1+x^2)}$ osserviamo che $\lim_{x \to 0^+} \frac{-2x}{x(1+x^2)} = -2; \quad e \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{-2x}{-x(1+x^2)} = 2$ quindi il punto $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, oltre ad essere un stremante, è un punto angoloso.

Inoltre per valori positivi di x si ha $y'' = \frac{4x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow y'' > 0 \quad per\ x > 0$ e per valori negativi di x risulta che $y'' = \frac{-4x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow y'' > 0 \quad per\ x < 0$. La concavità della funzione è sempre rivolta verso l'alto.