Studiare la seguente funzione $f(x)=\frac{x^2}{2}+\ln|x+1|$

(maturità 1994)

per $x>-1$ $\quad y=\frac{x^2}{2}+\ln(x+1) \quad (1)$

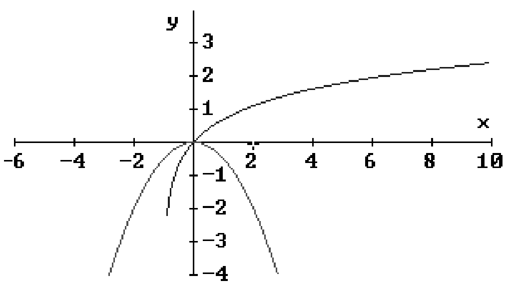
per $x<-1$ $\quad y=\frac{x^2}{2}+\ln(-x-1) \quad (2)$

per $x=-1$ la funzione non esiste. Quindi $D_f=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-1;+\infty\right[$

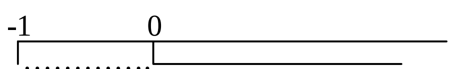
- Segno e intersezioni della (1)

per determinare quando $\ln(x+1)>-\frac{x^2}{2}$ (**)

adoperiamo il metodo grafico considerando il sistema: $\begin{cases} y=\ln(x+1) \\ y=-\frac{x^2}{2} \end{cases}$



e osserviamo che la (**) è verificata per $x>0$

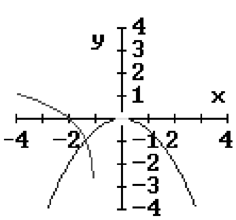


mentre per $x=0 \Rightarrow y=0$

- Segno e intersezioni della (2)

per determinare quando $\ln(-x-1)>-\frac{x^2}{2}$ (***)

adoperiamo ancora il metodo grafico considerando il sistema: $\begin{cases} y=\ln(-x-1) \\ y=-\frac{x^2}{2} \end{cases}$



Rileviamo che la (***) è verificata per $x<\alpha \quad con \quad -2<\alpha<-1$.

E per $x=\alpha \Rightarrow y=0$.

- Comportamento agli estremi dell'insieme di esistenza.

  Essendo $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{2}+\ln|x+1|\right)=+\infty$ $\quad\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{2}+\ln|x+1|\right)=+\infty$

  e $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ $\quad\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ il grafico della funzione non ha né asintoti orizzontali né obliqui.

  Poiché $\lim_{x\to-1^-}f(x)=-\infty$ $\quad\lim_{x\to-1^+}f(x)=-\infty$ il grafico ha l'asintoto verticale $x=-1$

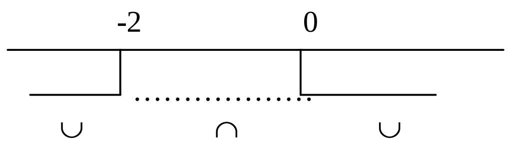
- Studio del segno della derivata prima

  Ricordando che $\frac{d}{dx}\left(\ln|f(x)|\right)=\frac{f'(x)}{f(x)}$ *per* $f(x)\neq 0$

  $y'=x+\frac{1}{x+1}\Rightarrow y'=\frac{x^2+x+1}{x+1}$ e questa risulta positiva per $x>-1\notin D_f$.

- Studio della del segno della derivata seconda $\quad y''=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

  $y''>0$ quando $x^2+2x>0 \quad\Rightarrow\quad -2<x \quad\vee\quad x>0$



il grafico presenta due punti di flesso $F_1(-2;2)\quad F_2(0;0)$

Le tangenti inflessionali hanno equazione:
$y-2=f'(-2)(x+2)\quad\Rightarrow\quad y=-3x-4$
$y=f'(0)\,x\quad\Rightarrow\quad y=x$