Funzioni composte

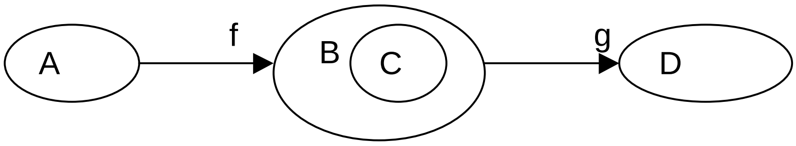
Siano f: A à B e g: C à D due funzioni reali di variabili reali con $f(A) \subseteq C$, sappiamo che ad ogni $x \in A$ è associato il numero reale $f(x)$ e a questo è associato il numero reale $g[f(x)]$. La funzione che associa ad ogni elemento di A un elemento di D si chiama funzione composta di g mediante f o funzione prodotto g - f .

Ad esempio:

$f: R \to R$ con $f(x) = x^2 + 1$ e $g: R^+ \to R$ con $g(v) = \log v$

osserviamo che f(R) è l'insieme dei reali non minori di 1, ovvero $f(R) \subset R^+$ e ogni $g(v) \in R^+$. Quindi: $g[f(x)] = \log(x^2 + 1)$.

Possiamo rappresentare una funzione composta mediante il seguente grafico:

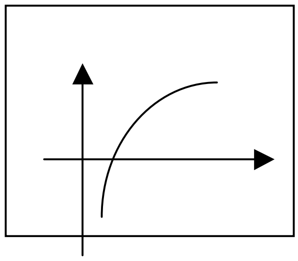


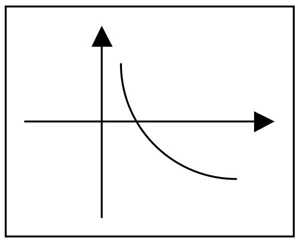
Funzioni monotone

Diciamo che una funzione è monotòna quando è crescente o decrescente o non decrescente o non crescente nel suo dominio.

(una funzione è monotona quando ha una sola intersezione con una generica retta parallela all'asse delle ascisse)

f(x) è crescente quando $\forall x_1, x_2 \in D_f \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$





f(x) è decrescente quando $\forall x_1, x_2 \in D_f \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Le funzioni crescenti e quelle decrescenti vengono anche dette strettamente crescenti e strettamente decrescenti.

f(x) è non decrescente (fig.1) quando $\forall x_1, x_2 \in D_f \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

f(x) è non crescente (fig.2) quando $\forall x_1, x_2 \in D_f \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$

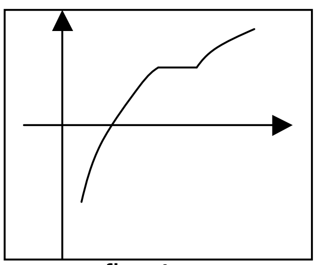


fig. 1

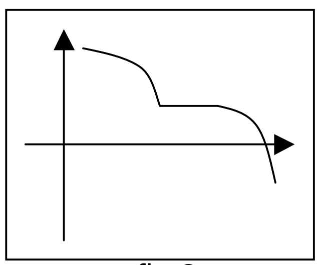
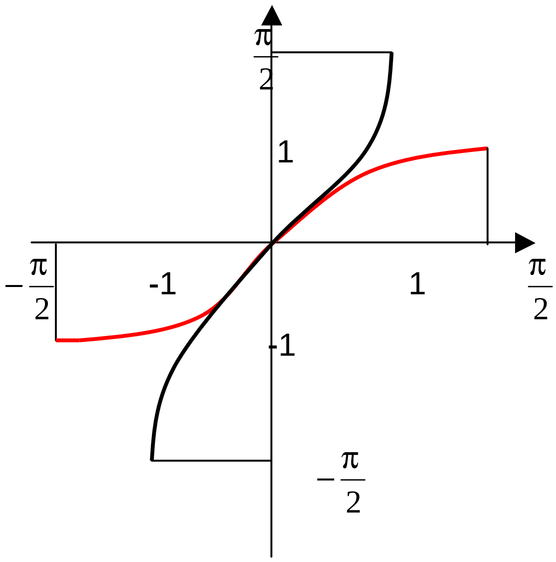


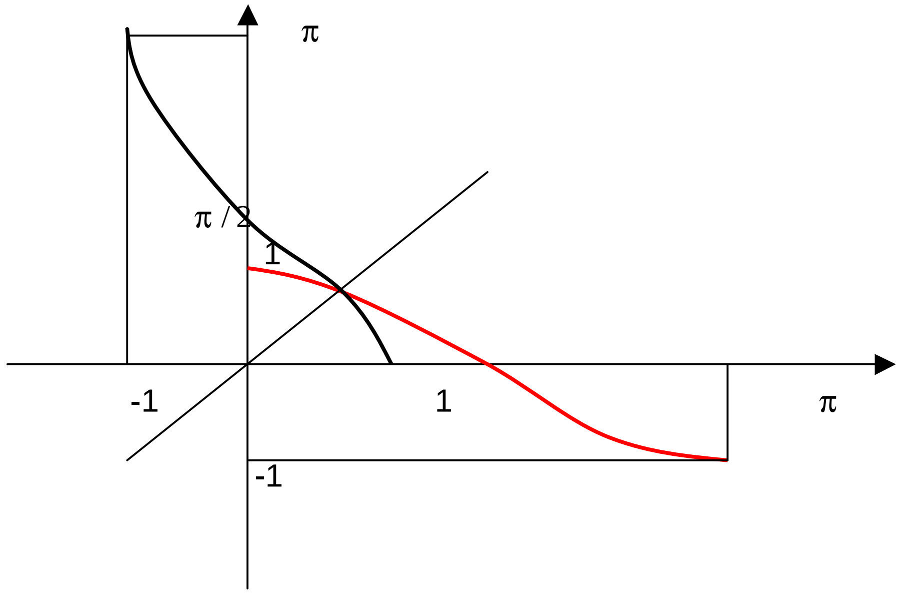
fig.2

Funzioni inverse

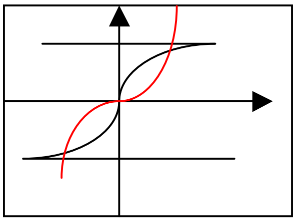
Una funzione è invertibile quando è strettamente crescente o strettamente decrescente nel suo dominio. Le funzioni periodiche (funzioni goniometriche), non essendo biettive in tutto l'insieme di esistenza, non sono invertibili. Se però le consideriamo in particolari intervalli esse ammettono la funzione inversa. La funzione $y = \operatorname{sen} x$, considerata nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, si può invertire e la sua funzione inversa è $x = \operatorname{arcsen} y$ (si legge "x è uguale all'arco il cui seno è uguale ad y ").



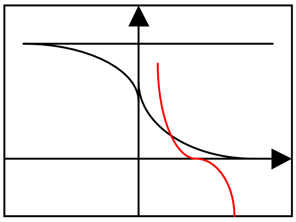
Anche la funzione coseno è invertibile nell'intervallo $[0;\pi]$ dov'è strettamente decrescente:
Se riportiamo i grafici di f ed f^{-1} nello stesso sistema di riferimento



notiamo che i grafici sono simmetrici rispetto alla bisettrice y = x.



$x = \text{arctg}\, y$



$x = arcctg\ y$

La funzione arctg è strettamente crescente nell'intervallo $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ mentre la funzione arccotg è strettamente decrescente nell'intervallo $]0;\pi[$, quindi sono invertibili in tali intervalli.

Funzione logaritmica e funzione esponenziale

Diamo innanzitutto un breve cenno sui concetti riguardanti i logaritmi.
Dato un numero reale a (maggiore di zero e diverso da 1), chiamiamo logaritmo in base a del numero positivo x, l'esponente y che deve essere dato alla base a per ottenere il numero dato, cioè:
$\log_a x = y \quad se \quad a^y = x.$, ad esempio: $\log_{10} 100 = 2 \quad perchè\ 10^2 = 100$.
Proprietà dei logaritmi:

a) $\log_a m \cdot n = \log_a m + \log_a n$

b) $\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$

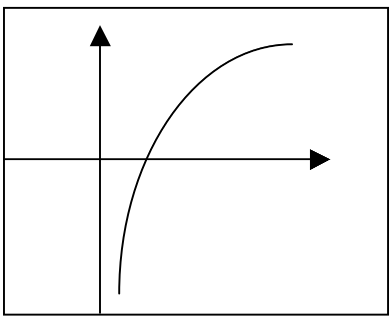
c) $\log_a m^n = n \log_a m$

casi particolari: $\log_a a = 1$; $\log_a 1 = 0$; $a^{\log_a m} = m$; $\log_a m = \frac{\log_b m}{\log_b a}$.

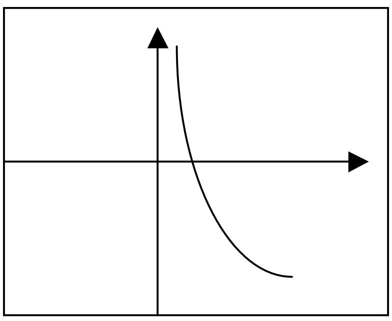
I logaritmi in base e (e=2.718..) si chiamano logaritmi naturali o neperiani e si indicano con il simbolo ln, i logaritmi in base 10 si chiamano logaritmi decimali e si indicano con il simbolo log.

Grafico della funzione logaritmica

Distinguiamo i due casi:

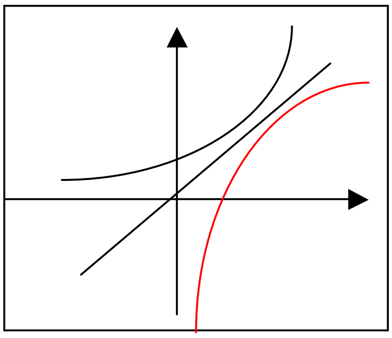


a >1

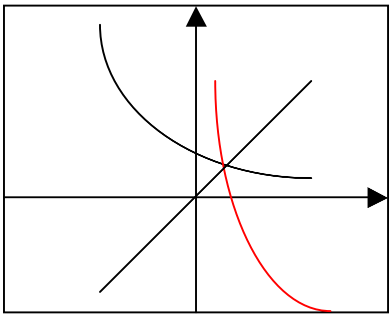


0 < a < 1

Grafico della funzione esponenziale



a >1



0 < a <1

I grafici exp e log si corrispondono in una simmetria ortogonale rispetto alla bisettrice y=x.

Il numero e

Come abbiamo già detto il numero e è la base dei logaritmi naturali, è un numero trascendente che vale 2.7182818….ed è il $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, cioè il limite della successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ per n tendente all'infinito.

Chiamiamo **successione** reale l'insieme ordinato di numeri reali $a_1;a_2;.....;a_n$ che sono i corrispondenti di un insieme di numeri naturali secondo una funzione iniettiva assegnata.

Ad esempio: l'insieme $a_n=\frac{1}{n}\quad con\ n\in N_0$ è la successione $1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};......$

Una successione si dice **limitata superiormente** (inferiormente) se tale risulta l'insieme dei termini della successione. Se la successione è limitata superiormente ed inferiormente si dice limitata.

Una successione si dice **convergente** quando il $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, cioè, comunque si sceglie un numero $\varepsilon > 0$, è sempre possibile determinare un elemento a_k della successione dopo il quale risulta $|a_{k+1} - l| < \varepsilon$.

Se, invece, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ la successione si dirà **divergente**. In tal caso, comunque si sceglie un numero k>0, è sempre possibile determinare un elemento a_r della successione in modo che $|a_r| > k$.

Quando la successione non è convergente né divergente si dice indeterminata.