Integrale indefinito

Si dice che la funzione F (x) è una primitiva della funzione f (x), continua nell'intervallo I se $F'(x) = f(x)$.

Se una funzione ammette in un intervallo I una primitiva, allora ne ammette infinite che differiscono tra loro a meno di una costante.

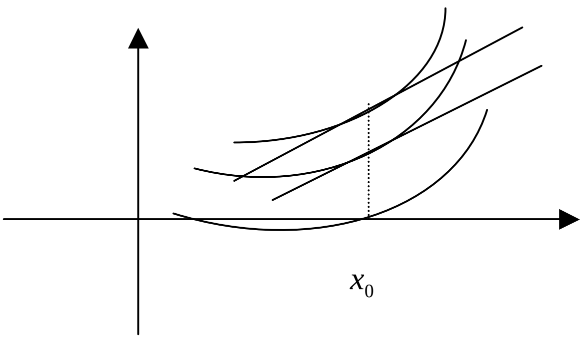
Infatti, se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ anche $F(x)+k \quad (k \in R)$ è una primitiva di $f(x)$ perché $D(F(x)+k) = F'(x) = f(x)$.

Si dice integrale indefinito di una funzione $f(x)$ l'insieme delle primitive della funzione e si indica con $\int f(x)\,dx$.

Possiamo quindi scrivere: $\int f(x)\,dx = F(x)+k$.

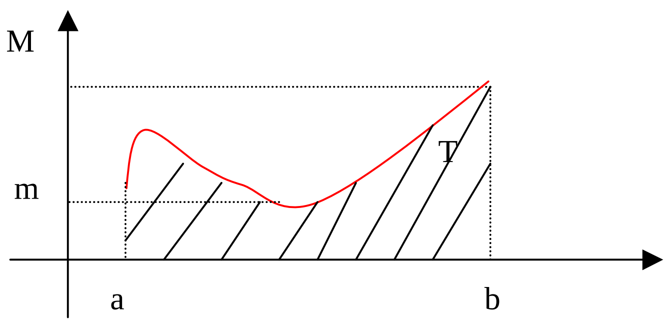
L'operazione che permette di calcolare l'insieme delle primitive si chiama integrazione indefinita mentre $f(x)$ si chiama funzione integranda.

Dal punto di vista geometrico l'integrale indefinito rappresenta un insieme di curve che si ottengono l'una dall'altra mediante una traslazione lungo l'asse y e queste curve presentano nello stesso punto x_0 tangenti tra loro parallele.



Integrale definito

Sia $y = f(x)$ una funzione continua non negativa definita nell'intervallo $[a;b]$, indichiamo con T l'insieme dei punti del piano per i quali $a \le x \le b \quad e \quad 0 \le y \le f(x)$.



E' evidente che dev'essere $(b-a)\cdot m \le A_T \le (b-a)\cdot M$.

Se l'intervallo $[a;b]$ viene suddiviso in n parti uguali e si considerano in ciascuna parte il valore minimo (m) ed il valore massimo (M), si ha $\sum_i m_i h \le A_T \le \sum_i M_i h$. Se il numero delle suddivisioni aumenta le due sommatorie tendono allo stesso valore che è l'area del trapezoide.

Quindi, per $n \to \infty$ si ha: $\lim_{n\to\infty} \sum_i m_i h \le \lim_{n\to\infty} A_T \le \lim_{n\to\infty} \sum_i M_i h$, ossia:

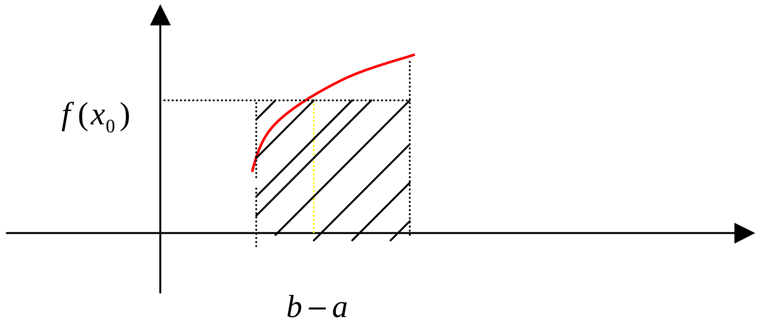
$A_T = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Teorema della media

Se $y = f(x)$ è una funzione continua definita nell'intervallo $\left[a;b\right]$, esiste almeno un punto x_0 di $\left[a;b\right]$ in cui si ha: $f(x_0) = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$.

Poiché $(b-a)\cdot m \le \int_a^b f(x)\,dx \le (b-a)\cdot M$ si ha: $m \le \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le M$. Per la continuità della funzione esisterà un punto x_0 dell'intervallo $\left[a;b\right]$ in cui la funzione assume il valore $f(x_0)$ compreso fra il minimo ed il massimo di $y = f(x)$

Dal punto di vista geometrico il teorema della media afferma che l'area del trapezoide è uguale all'area del rettangolo di base $b-a$ e altezza $f(x_0)$.



Teorema di Torricelli

Data la funzione $y = f(x)$ continua in $\left[a;b\right]$, la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è derivabile per ogni x appartenente al dominio della funzione e risulta: $F'(x) = f(x),\quad F(a) = 0$.

Per dimostrare il teorema si consideri il rapporto incrementale della funzione integrale:

$\dfrac{\Delta F}{\Delta x} = \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = \dfrac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} = \dfrac{\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h}$ da cui si ha:

$\dfrac{\Delta F}{\Delta x} = \dfrac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}$. Per il teorema della media esiste un punto $\xi \in [a;b]$ per il quale risulta:

$\dfrac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} = f(\xi)$ .Quindi: $\dfrac{\Delta F}{\Delta x} = f(\xi)$. Per $\Delta x \to 0$ si ha: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\Delta F}{\Delta x} = \lim\limits_{h\to 0} f(\xi) = \lim\limits_{\xi\to x} f(\xi) = f(x)$

E' inoltre evidente che $F(x) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$.

Il teorema è quindi pienamente dimostrato

Esercizio n° 1

Determinare il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione

$f(x) = \int_1^x t \ln t \, dt \quad in \quad x = e.$

Poiché $f'(x) = x \ln x$ segue che: $f'(e) = e$. Ed essendo $\int t \ln t \, dt = \frac{1}{2}t^2 \ln t - \frac{1}{2}\int t \, dt =$

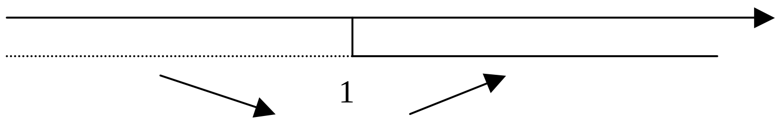
$= \frac{1}{2}t^2 \ln t - \frac{1}{4}t^2$ si ha: $f(e) = \frac{1}{4}e^2.$

Esercizio n° 2

Determinare gli eventuali massimi o minimi relativi della funzione $f(x) = \int_0^x (t-1)e^t \, dt$.

Per determinare gli estremanti basta considerare il segno della derivata prima della funzione. Risolviamo quindi la disequazione $f'(x) \geq 0$ ossia $(x-1)e^x \geq 0.$

Questa è positiva per $x \geq 1$



La funzione presenta un minimo relativo per $x = 1$.

Esercizio n° 3

Determinare l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $f(x) = \int_0^x t \cos t \, dt$

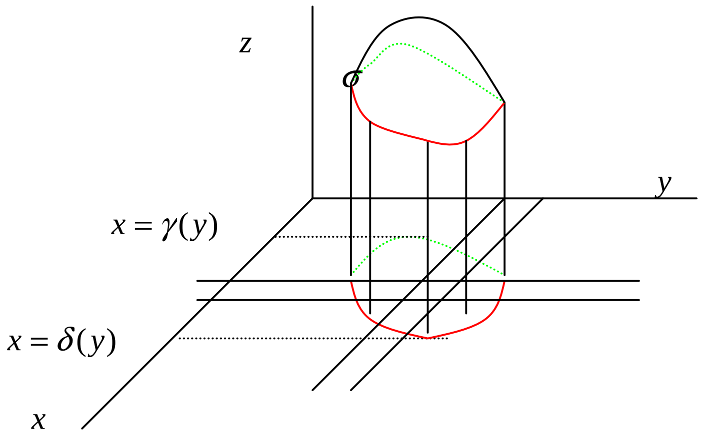
nel punto di ascissa $x_0 = \pi$.

Essendo $f'(x) = x \cos x, \quad si \quad ha \quad f'(\pi) = -\pi$.

Inoltre $f(\pi) = \int_0^\pi t \cos t \, dt = (t \operatorname{sen} t - \int \operatorname{sen} t \, dt)_0^\pi = (t \operatorname{sen} t + \cos t)_0^\pi = -1 - 1 = -2.$ Quindi la retta tangente ha equazione: $y + 2 = -\pi(x - \pi).$

Integrali doppi

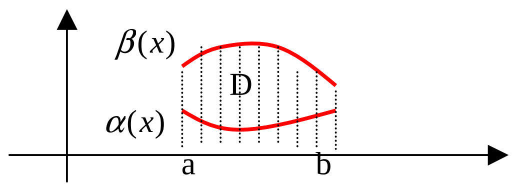
Prima di definire l'integrale doppio $I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy,$ si suddivida il piano xy in quadretti Q_i di lato $\delta,$ mediante il doppio sistema di rette $x = h\delta, \, y = k\delta$ con $h \wedge k \in Z.$ Di tali quadretti si prendano tutti e solo quelli che contengono punti del dominio di integrazione D. In ogni quadretto si prenda, ad arbitrio, un punto $(\xi_i;\eta_i) \in D$ e si formi la somma integrale $S = \sum_i f(\xi_i;\eta_i)\delta^2.$ Per definizione è $I = \lim_{\delta \to 0} S,$ se tale limite esiste finito. Se $f(x;y) > 0$ tale limite fornisce la misura del volume del cilindroide limitato dalle seguenti superfici: dal dominio D, dalla porzione σ di superficie $z = f(x,y)$ che si proietta ortogonalmente in D e dalla porzione di superficie cilindrica avente generatrici parallele all'asse z, compresa tra il contorno del dominio e il bordo di σ (vedi figura).



Osserviamo che quando $f(x,y)=1$ l' $\iint_D dx\,dy$ fornisce l'area del dominio D.

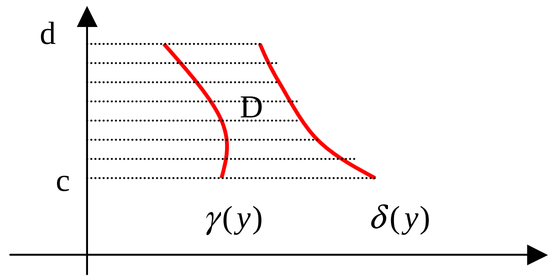
Ricordiamo infine che il calcolo di un integrale doppio può essere ricondotto al calcolo di due integrali semplici. Prima di indicare le formule di riduzione occorre stabilire se il dominio D è normale rispetto all'asse x o all'asse y.

1° caso: d è normale rispetto all'asse x.
Ovvero è possibile suddividere il dominio in un insieme di intervalli in modo che i punti P (x; y) di tale dominio soddisfino le seguenti limitazioni: $a \le x \le b$; $\alpha(x) \le y \le \beta(x)$, dove $\alpha(x)$ *e* $\beta(x)$ sono due funzioni continue definite nell'intervallo $[a,b]$.



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy$$

2° caso: D è normale rispetto all'asse y
Ovvero è possibile suddividere il dominio in un insieme di intervalli in modo che i punti P (x; y) di tale dominio soddisfino le seguenti limitazioni: $c \le y \le d$; $\gamma(y) \le x \le \delta(y)$, dove $\gamma(x)$ *e* $\delta(x)$ sono due funzioni continue definite nell'intervallo $[c,d]$.



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)dx$$

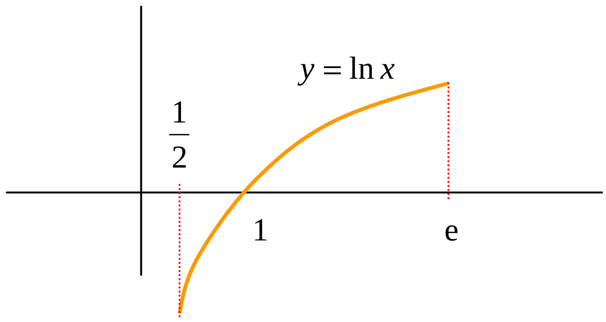
Se il dominio è normale rispetto all'asse x e rispetto all'asse y le formule di riduzione possono essere utilizzate indifferentemente.

Esempi

- Calcolare l'area del dominio sapendo che $D = \left\{(x,y) \in \Re^2 : \frac{1}{2} \le x \le e \quad 0 \le y \le |\ln x|\right.$ e $\iint\limits_D x\,dx\,dy$.

  Poiché il dominio è normale rispetto all'asse x si ha: $S = \iint\limits_D dx\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^{e} dx \int_0^{|\ln x|} dy = \int_{\frac{1}{2}}^{e} |\ln x| dx$

  Essendo $\ln x > 0 \quad per \quad x > 1$ (vedi figura)



$$S = \int_{\frac{1}{2}}^{1} -\ln x \;\; dx + \int_1^e \ln x \;\; dx = \left| -x \;\; \ln x + x \right|_{\frac{1}{2}}^{1} + \left| x \;\; \ln x - x \right|_1^e = \frac{3}{2} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

  Mentre,

$$\iint_D \; x\,dx\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^{e} x\,dx \int_0^{|\ln x|} dy = -\int_{\frac{1}{2}}^{1} (x \;\; \ln x)dx + \int_1^e (x \; \ln x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^e =$$

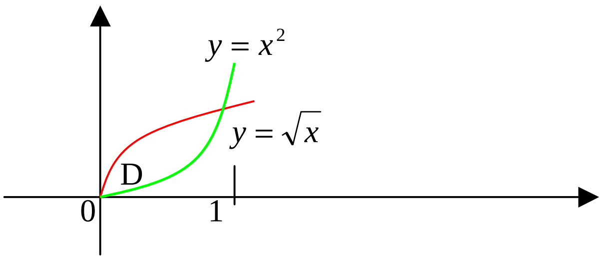
$$= \frac{1}{4}\left(1 + e^2 + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

- Calcolare l'area del dominio: $D = \left\{(x,y) \in \Re^2 : 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \quad ; \quad 0 \le y \le x \cos x\right\}$.

  Poiché il dominio è normale rispetto all'asse x si ha:

$$\iint\limits_D dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{x\cos x} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [y]_0^{x\cos x} \quad dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = [x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

- Calcolare l'area del seguente dominio: $D=\left\{(x,y)\in\Re^2:\ x\geq y^2\quad;\quad y\geq x^2\right\}$ e $\iint_D x\,y\,dx\,dy$

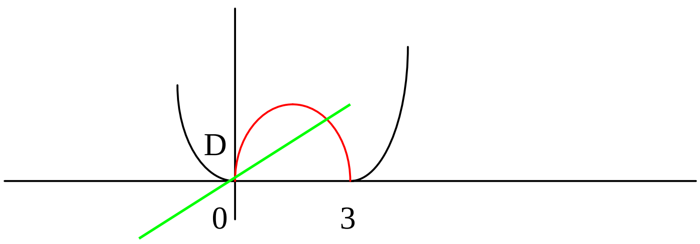


Considerando il dominio normale rispetto all'asse x si ha:

$$S=\iint_D dx\,dy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}dy=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,dx=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\text{, inoltre:}$$

$$\iint_D x\,y\,dx\,dy=\int_0^1 x\,dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}y\,dy=\int_0^1 x\left|\frac{1}{2}y^2\right|_{x^2}^{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(x^2-x^5\right)dx=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^6\right|_0^1=\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12}.$$

- Sia $D=\{(x,y)\in\Re^2\quad:\quad 0\leq x\leq 2\quad x\leq y\leq\left|x^2-3x\right|\}$ Calcolare l'area del dominio. Poiché la funzione $y=\left|x^2-3x\right|$ è negativa nell'intervallo $[0;2]$ (vedi figura),



Considerando il dominio normale rispetto all'asse x, si ha:

$$S=\int_0^2 dx\int_x^{3x-x^2}dy=\int_0^2(3x-x^2-x)\,dx=\left|x^2-\frac{1}{3}x^3\right|_0^2=\frac{4}{3}.$$

- Calcolare l'area del dominio: $D=\left\{(x,y)\in\Re^2:1\leq x\leq e\quad;\quad 0\leq y\leq\ln x\right\}$ e $\iint_D x\,dx\,dy$

Considerando D normale all'asse x, si ha: $S=\iint_D dx\,dy=\int_1^e dx\int_0^{\ln x}dy$ quindi

$S=\int_1^e\ln x\,dx=\left[x\ln x-x\right]_1^e=1$ Inoltre: $\iint_D x\,dx\,dy=\int_1^e x\,dx\int_0^{\ln x}dy=\int_1^e(x\ln x)dx$; da cui

$$V=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2\right]_1^e=\frac{1}{4}(e^2+1).$$