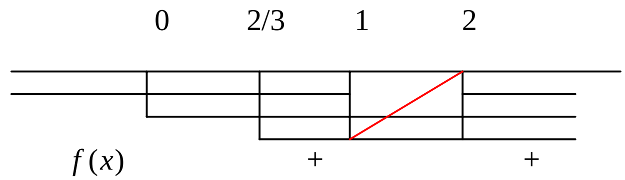
Studiare la funzione $y = x - \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

- Dominio di $f(x)$
  La funzione esiste quando $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ ovvero per $x \leq 1 \vee x \geq 2$ quindi $D_f = \left]-\infty; 1\right] \cup \left[2; +\infty\right[$.
- Per determinare il segno di $f(x)$ e le intersezioni con gli assi

  risolviamo la disequazione: $\sqrt{x^2 - 3x + 2} \leq x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 \leq x^2 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} x \leq 1 \vee x \geq 2 \\ x \geq 0 \\ x \geq \dfrac{2}{3} \end{cases}$



  I punti di intersezione con gli assi sono $A(0; -\sqrt{2})$ $B\left(\dfrac{2}{3}; 0\right)$
- Studiamo l'andamento della funzione agli estremi dell'insieme di esistenza

  essendo $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - x^2 + 3x - 2}{x + \sqrt{x^2 + 3x - 2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - x^2 + 3x - 2}{x + |x|\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}}$ si ha:

  $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x - 2}{x - x\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}} = -\infty$ e

  $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x - 2}{x + x\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}} = \dfrac{3}{2}$ quindi $y = \dfrac{3}{2}$ è l'asintoto orizzontale.

  Ricordando che $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}\left(x - |x|\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}\right)$ notiamo che:

  $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\left(x - x\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}\right) = 1 - 1 = 0$ mentre $m = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}\left(x + x\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}\right) = 2$

  Essendo $q = \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(x - \sqrt{x^2 - 3x + 2} - mx\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left((1 - m)x - \sqrt{x^2 - 3x + 2}\right)$

  Razionalizzando otteniamo: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\left[(1 - m)x - \sqrt{x^2 - 3x + 2}\right]\left[(1 - m)x + \sqrt{x^2 - 3x + 2}\right]}{(1 - m)x + \sqrt{x^2 - 3x + 2}} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(1-m)^2 x^2 - x^2 + 3x - 2}{(1-m)x + |x|\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}}$$

e, ricordando che per $x \to -\infty \quad m = 2$ si ha:

$$q = \lim_{x\to-\infty} \frac{(1-2)^2 x^2 - x^2 + 3x - 2}{(1-2)x - x\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x-2}{-x - x\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}} = -\frac{3}{2}$$

La curva ha quindi l'asintoto obliquo: $y = 2x - \frac{3}{2}$.

- Determiniamo gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione.

$$y' = 1 - \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}}; \quad y' = \frac{2\sqrt{x^2-3x+2} - 2x + 3}{2\sqrt{x^2-3x+2}} \Rightarrow \quad D_{y'} = D_f - \{1; 2\}$$

$y' \geq 0$ quando $2\sqrt{x^2-3x+2} \geq 2x-3$ Le soluzioni della disequazione sono date dai sistemi: $\begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ 4\left(x^2-3x+2\right) \geq 4x^2 - 12x + 9 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-3 < 0 \\ x^2-3x+2 > 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ 8 \geq 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x < 1 \quad x > 2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad x < 1$$

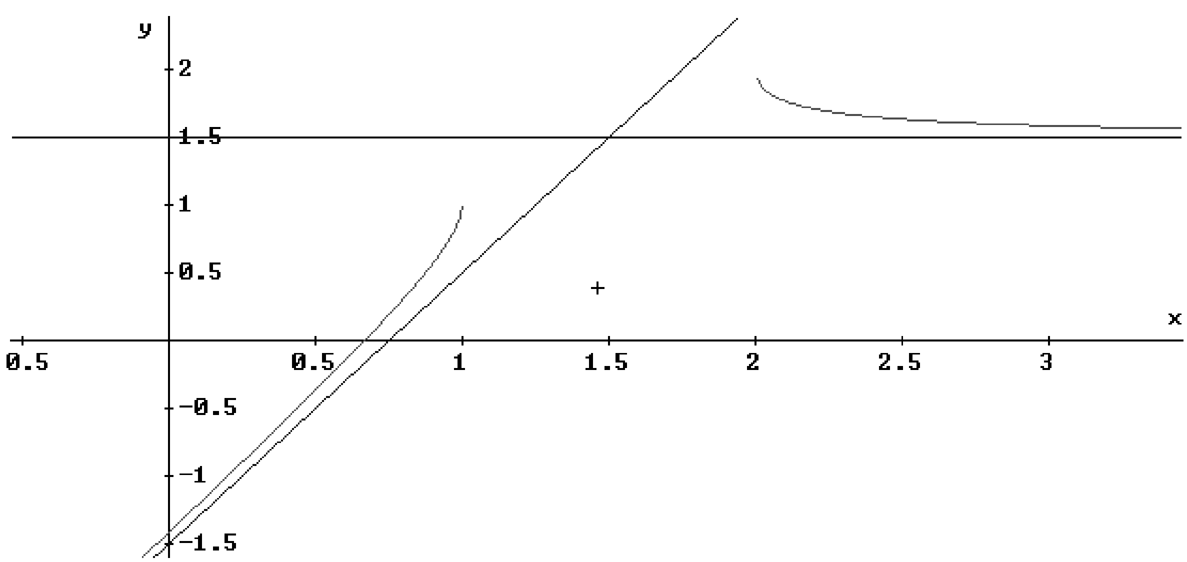


grafico della funzione