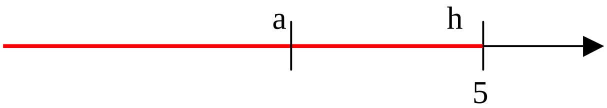
Introduzione al concetto di limite

Prima di avviare il discorso sui limiti è opportuno rivedere il significato di alcuni termini che sono di uso comune nella trattazione del limite di una funzione.

Insieme limitato superiormente: un insieme numerico A si dice limitato superiormente se esiste un numero h tale che $\forall a \in A \Rightarrow a \le h$.
Ad esempio il dominio della funzione $y = \sqrt{5-x}$ è un insieme limitato superiormente.



$a \le 5$

Si dice anche che l'elemento 5 è un **maggiorante** di A

Insieme limitato inferiormente: un insieme numerico A si dice limitato inferiormente se esiste un numero k tale che $\forall a \in A \Rightarrow a \ge k$
Ad esempio il dominio della funzione $y = \sqrt{x+2}$ è un insieme limitato inferiormente.

$a \ge -2$

Si dice anche che l'elemento -2 è un **minorante** di A

Un insieme limitato superiormente e inferiormente si dice **limitato**.

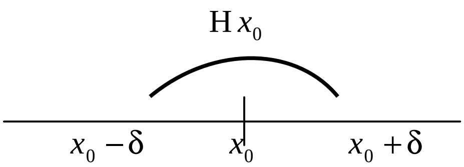
$0 \le a \le 1$

Ad esempio: l'insieme degli elementi della successione $a_n = \left\{ \frac{1}{n+1} \right\}$ $con\ n \in N$ è insieme infinito limitato sia inferiormente che superiormente, infatti i suoi elementi verificano la condizione $0 \le a \le 1$.

Intervallo: dati due numeri reali h e k con $h < k$, chiamiamo **intervallo chiuso** di estremi h e k $[h;k]$ l'insieme dei numeri reali a per i quali risulta vera la relazione: $h \le a \le k$.
Se i numeri $a \in \Re$ soddisfano la relazione:

- $h \le a < k$ $\quad [h;k[$ l'intervallo si dirà aperto a destra e chiuso a sinistra;
- $h < a \le k$ $\quad]h;k]$ l'intervallo si dirà aperto a sinistra e chiuso a destra;
- $h < a < k$ $\quad]h;k[$ l'intervallo si dirà aperto.

Definiamo **intorno completo** di x_0 un qualsiasi intervallo che contiene x_0 (vedi figura)



H x_0 è l'insieme dei punti x per i quali si ha: $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$.

Estremi di un insieme

Diciamo che il numero reale **a** è **estremo superiore** per l'insieme A se gode delle proprietà:

- è il più grande degli elementi di A (minimo dei maggioranti di A)
- comunque piccolo si scelga un numero positivo ε ,

Se questo elemento appartiene all'insieme si chiama **massimo**.

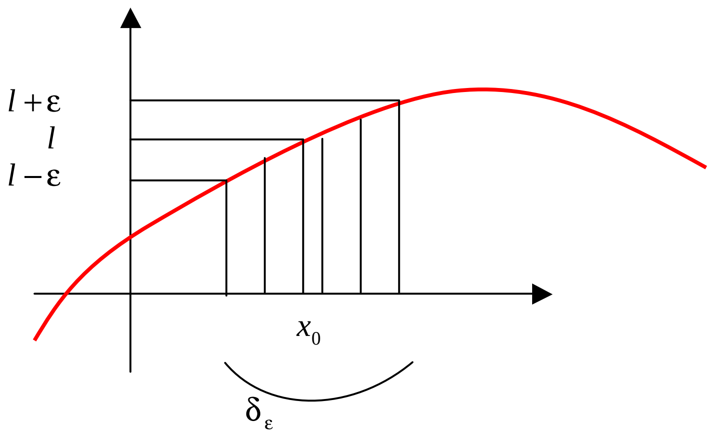
Diciamo che il numero reale a è **estremo inferiore** per l'insieme A se gode delle proprietà:

- è il più piccolo degli elementi di A (massimo dei minoranti di A)
- comunque piccolo si scelga un numero positivo ε , $\exists x\in A/x<a+\varepsilon$.

Se questo elemento appartiene all'insieme si chiama **minimo**. Ad esempio 1 è minimo dell'insieme $A=\{x/x\in$ ã $;1\le x<20\}$; mentre 20 non è massimo dell'insieme.

Limiti di una funzione

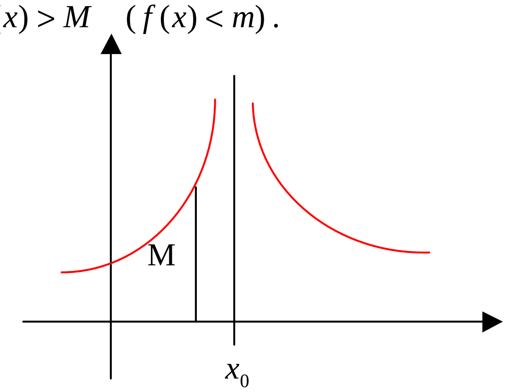
Sia y = f (x) una funzione definita in un intorno I del punto x_0, senza che essa sia necessariamente definita in tale punto. Si dice che l è il limite della funzione per x tendente a x_0 e si scrive: $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ quando, fissato comunque un numero $\varepsilon>0$, è possibile determinare in corrispondenza un intorno completo δ_ε di x_0 per i punti del quale si ha $|f(x)-l|<\varepsilon$

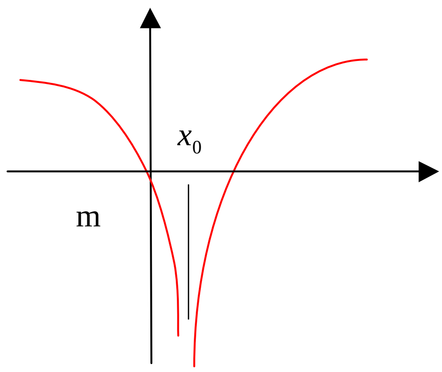


nota: evidentemente x_0 e un **punto di accumulazione** di (a;b) ovvero, un qualunque intorno di x_0 contiene infiniti elementi di (a;b).

Limite infinito

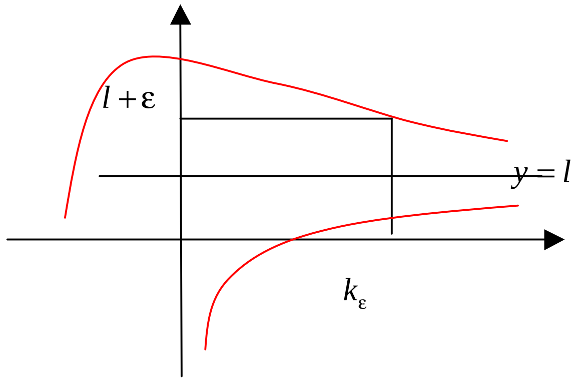
Sia y = f(x) una funzione definita in un intorno I del punto x_0, senza che essa sia necessariamente definita in tale punto. Si dice che $+\infty$ $(-\infty)$ è il limite della funzione per x tendente a x_0 e si scrive: $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ $(-\infty)$ quando, fissato comunque un numero M > 0 (m < 0) è possibile determinare in corrispondenza un intorno δ_M (δ_m) di x_0 per i punti del quale si abbia: $f(x)>M$ $(f(x)<m)$.



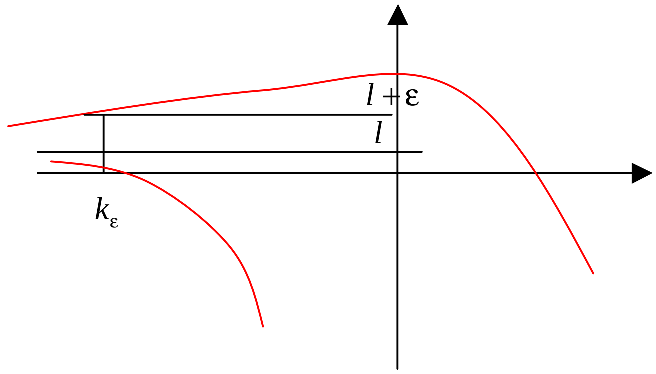


Limite di una funzione all'infinito

Sia y = f(x) una funzione definita in un insieme D_f illimitato superiormente, si dice che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ se, fissato comunque un numero $\varepsilon > 0$, è possibile determinare in corrispondenza un numero k_ε in modo che $\forall x \in D_f$ e maggiore di k_ε risulti: $|f(x) - l| < \varepsilon$.



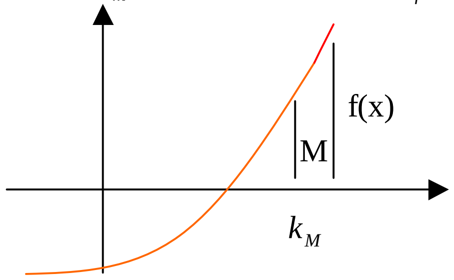
Sia y = f(x) una funzione definita in un insieme D_f illimitato inferiormente, si dice che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ se, fissato comunque un numero $\varepsilon > 0$, è possibile determinare in corrispondenza un numero k_ε in modo che $\forall x \in D_f$ e minore di k_ε , risulti: $|f(x) - l| < \varepsilon$.

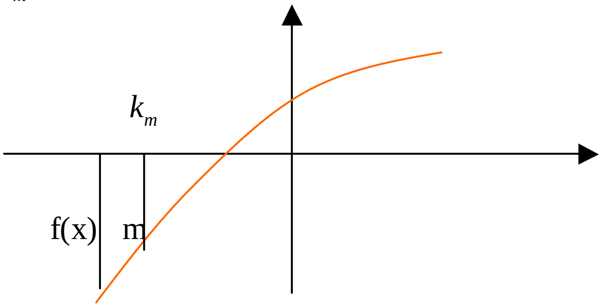


Limite infinito di una funzione all'infinito

Sia y = f(x) una funzione definita in un insieme D_f illimitato superiormente, si dice che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se, fissato comunque un numero M > 0, è possibile determinare in corrispondenza un numero k_M in modo che $\forall x \in D_f$ e maggiore di k_M , risulti: $f(x) > M$.

Sia y = f(x) una funzione definita in un insieme D_f illimitato inferiormente, si dice che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ se, fissato comunque un numero m < 0, è possibile determinare in corrispondenza un numero k_m in modo che $\forall x \in D_f$ e minore di k_m , risulti: $f(x) < m$.





Limite sinistro e destro

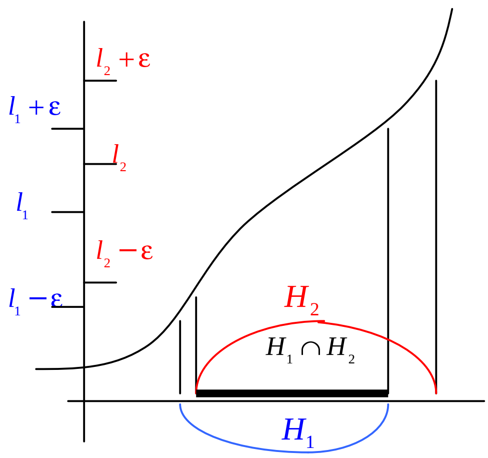
Sia y = f(x) una funzione definita in un intorno sinistro I^- del punto x_0, senza che essa sia necessariamente definita in tale punto. Si dice che l è il limite della funzione per x tendente a x_0^- e si scrive: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$ quando, fissato comunque un numero $\varepsilon > 0$, è possibile determinare in corrispondenza un intorno sinistro δ_ε di x_0 per i punti del quale si ha $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Sia y = f(x) una funzione definita in un intorno destro I^+ del punto x_0, senza che essa sia necessariamente definita in tale punto. Si dice che l è il limite della funzione per x tendente a x_0^+ e si scrive: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ quando, fissato comunque un numero $\varepsilon > 0$, è possibile determinare in corrispondenza un intorno destro δ_ε di x_0 per i punti del quale si ha $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Se la funzione ammette limite destro e sinistro per x tendente a x_0 e questi due limiti sono uguali la funzione si dice che ammette limite.

Teorema dell'unicità del limite

Def. Se una funzione ammette limite per x tendente a x_0 tale limite è unico.
Supponiamo per assurdo che la funzione ammetta due limiti distinti l_1 *e* l_2 con $l_1 < l_2$.
Per definizione di limite è possibile determinare un intorno completo H_1 di x_0 per gli elementi del quale si ha $|f(x) - l_1| < \varepsilon$ e un intorno completo H_2 di x_0 per gli elementi del quale si ha: $|f(x) - l_2| < \varepsilon$, ovvero: $l_1 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon$ e $l_2 - \varepsilon < f(x) < l_2 + \varepsilon$.
Se consideriamo l'intorno completo $H = H_1 \cap H_2$ e scegliamo $\varepsilon = \dfrac{l_2 - l_1}{2}$



avremo: $l_2 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon$ Essendo $l_2 - \varepsilon < l_1 + \varepsilon$ si ricava $\varepsilon > \dfrac{l_2 - l_1}{2}$ il che è assurdo perché in contrasto con la scelta da noi fatta.

Teorema del confronto

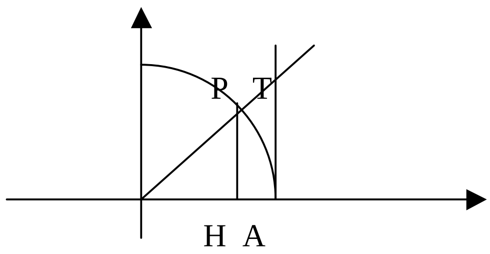
Siano f(x), h(x) e g(x) tre funzioni definite in un intorno I di x_0, escluso al più tale punto, e tali che risulti: $f(x) \le h(x) \le g(x)$; se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$ allora risulta: $\lim_{x \to x_0} h(x) = l$.
Infatti, essendo per ipotesi $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$ e $l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon$, potremo scrivere: $l - \varepsilon < f(x) \le h(x) \le g(x) < l + \varepsilon$. Quindi $l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$ e $\lim_{x \to x_0} h(x) = l$.

Teorema della permanenza del segno

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ con $l \ne 0$ esiste un intorno I di x_0, privato al più di tale punto, in cui la funzione assume lo stesso segno del limite l.

Sia $l \ne 0$ il limite della funzione e sia $\varepsilon = \frac{|l|}{2}$. Per definizione di limite si può scrivere: $|f(x) - l| < \varepsilon$, quindi: $|f(x) - l| < \frac{|l|}{2}$, da cui si ricava: $l - \frac{|l|}{2} < f(x) < l + \frac{|l|}{2}$.
Se $l < 0$, $l + \frac{|l|}{2} < 0$ e quindi $f(x) < 0$.
Se $l > 0$, $l - \frac{|l|}{2} > 0$ e quindi $f(x) > 0$

Limiti notevoli



$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad (1)$$

Osserviamo che $PH < AP < AT$ ossia: $\operatorname{sen} x < x < tg\, x$ da cui si ha: $\operatorname{sen} x < x < \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

invertendo $\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\operatorname{sen} x}$ e moltiplicando per $\operatorname{sen} x$ si ottiene: $\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$ e passando al limite $\lim_{x \to 0} \cos x < \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \lim_{x \to 0} 1$ e per il teorema del confronto si ha la (1).

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

(vedi dimostrazione nella pagina limiti di successioni)

da questo limite notevole segue che:

(1) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

infatti, posto $\frac{1}{x} = t,\quad t\to\infty \quad per \quad x\to 0$ quindi $\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$

(2) $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\ln(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}} = \alpha$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \log_e a$

infatti, posto $a^x - 1 = t$ si ha: $x = \log_a(t+1)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(t+1)} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\log_e(t+1)}{\log_e a}} = \log_e a\frac{1}{\lim_{t\to 0}\frac{\log_e(t+1)}{t}} = \log_e a$$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$ che discende dalla precedente ponendo $a = e$

(5) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-1}{x} = \alpha$ che deriva dalla precedente ponendo $\alpha x = t$

Funzioni continue

Una funzione si dice continua in x_0 quando $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, cioè:

1) esiste ed è finito il limite della funzione per x tendente a x_0 ;
2) esiste il valore della funzione in x_0 ,
3) il limite della funzione è uguale al valore della funzione.

Se una funzione è continua $\forall\, x\in D_f$ essa si dice continua.

Se una funzione è continua in un punto x_0 dev'essere $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$.

Forme di indecisione o punti di discontinuità

1) Di prima specie quando $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l_1,\ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l_2$ e $l_1 \neq l_2$. Se $l_1 > l_2$ il valore $l_1 - l_2$ si chiama salto della funzione in x_0 .

Es: $f(x) = \begin{cases} x-1 & x<0 \\ \cos x & x\geq 0\end{cases}$ presenta un punto di discontinuità di prima specie per $x = 0$

2) Di seconda specie quando almeno uno dei due limiti destro o sinistro non esiste oppure se esiste è infinito.

Es: $y = \cot g\, x$ per $x = k\pi$; $y = e^{\frac{2}{x}}$ per $x \to 0^+$

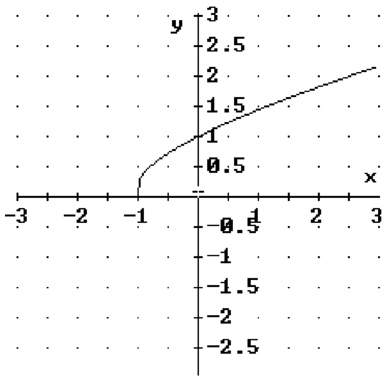
3) Di terza specie quando esiste ed è finito il limite della funzione per $x \to x_0$ ma non esiste il valore della funzione in x_0 o, se esiste è diverso dal limite.

Es: la funzione $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$ possiede limite finito per $x \to 2$ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = -1$
mentre non esiste il valore di $f(2)$.

la funzione $y = \dfrac{x}{\ln(x+1)}$ non esiste nei punti $x = 0$ e $x = -1$ ma possiede limite finito per $x \to 0$ e per $x \to -1$.

Questo tipo di discontinuità si dice anche eliminabile perché possiamo assumere come valore della funzione in x_0 il valore del limite.

Nel secondo esempio, se poniamo $f(0) = 1$ e $f(-1) = 0$ eliminiamo le discontinuità (vedi grafico).



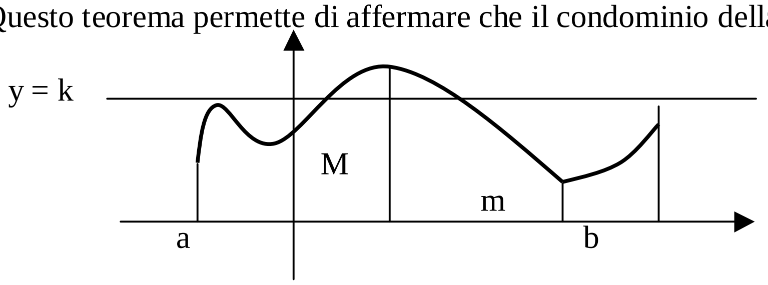
$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = 1$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x}{\ln(1+x)} = 0$$

Teoremi

Teorema di Weierstrass per le funzioni continue

Ogni funzione continua in un insieme chiuso e limitato $[a, b]$ è dotata di massimo e di minimo.
Questo teorema permette di affermare che il condominio della f(x) è limitato.



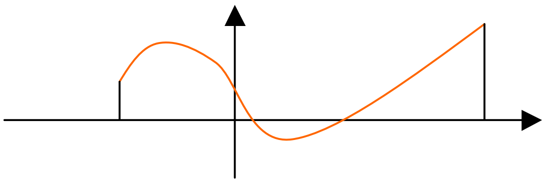
Teorema di Darboux e Bolzano (o dei valori intermedi)

Se una funzione è continua in un insieme chiuso e limitato essa assume tutti i valori compresi fra il suo minimo ed il suo massimo. Cioè $\forall\, x \in D_f \Rightarrow m \le f(x) \le M$.

Graficamente significa che $\forall k \in [M, m]$ la retta y = k interseca il grafico della funzione almeno in un punto.

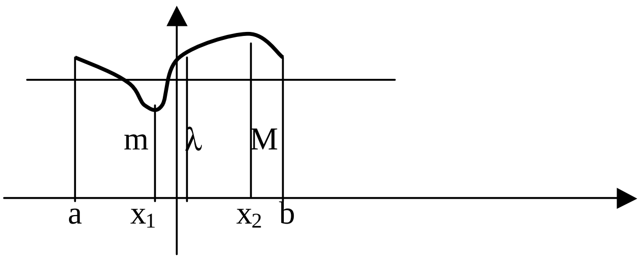
Teorema di esistenza degli zeri

Se una funzione è continua in $]a;b[$ e assume valori di segno opposto all'interno di tale insieme esiste almeno un punto in cui essa si annulla.



Teorema di Weierstrass per le funzioni continue

Ogni funzione continua in un insieme chiuso e limitato $[a,b]$ è dotata di massimo e di minimo.
Questo teorema permette di affermare che il condominio della f(x) è limitato.



Siano $x_1, x_2 \in [a;b]$ rispettivamente le ascisse dei punti di minimo e di massimo della funzione, ovvero $f(x_1) = m$ e $f(x_2) = M$.

Supponendo che la funzione $f(x)$ non sia costante $(m \neq M)$ e $x_1 < x_2$ consideriamo la funzione $g(x) = f(x) - \lambda$, con $\lambda \in]m;M[$, definita nell'intervallo $[x_1;x_2]$.
Poiché $g(x)$ risulta continua si ha:

$$g(x_1) = f(x_1) - \lambda < 0 \quad \Rightarrow \quad m - \lambda < 0$$

$$g(x_2) = f(x_2) - \lambda > 0 \quad \Rightarrow \quad M - \lambda > 0$$

Per il teorema di esistenza degli zeri $\exists \bar{x} \in]x_1;x_2[: g(\bar{x}) = 0$ ossia $f(\bar{x}) = \lambda$

Se $\lambda = m \Rightarrow \bar{x} = x_1$ se $\lambda = M \Rightarrow \bar{x} = x_2$

La funzione assume quindi tutti i valori compresi fra il suo minimo ed il suo massimo.