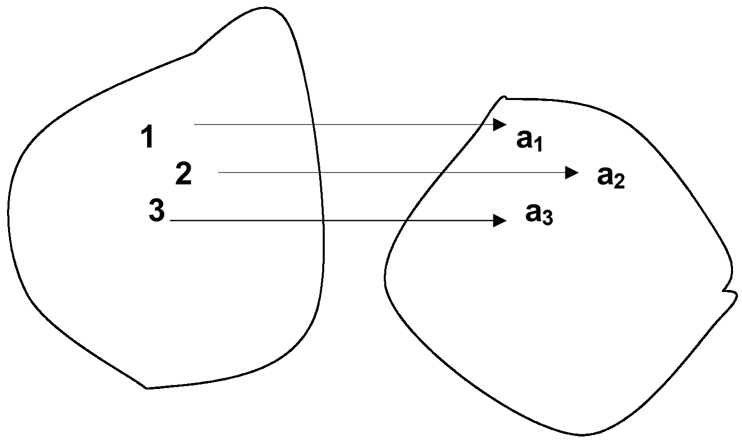
Successioni

Chiamiamo successione una funzione $f:\aleph_0 \rightarrow \Re$ che associa ad ogni numero naturale diverso da zero un numero reale.



Ad esempio la funzione matematica definita dalla legge: $f(n)=n^2+1$ origina la successione che ha come elementi i numeri: 2; 5; 10; **…………..**

Limiti di successioni convergenti

- Diciamo che la successione $a_1, a_2, ..., a_n$ **ha limite l** per $n \rightarrow +\infty$, quando, scelto ad arbitrio un numero positivo ε, è possibile determinare in corrispondenza ad esso un numero n_ε tale che $\forall n > n_\varepsilon$ sia verificata la disuguaglianza: $|a_n - l| < \varepsilon$, ossia: $l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon$ e scriveremo:. $\lim_{n\rightarrow+\infty} a_n = l$ (1)

In tal caso diremo che la successione è **convergente**.

Esempio 1

Verificare che $\lim_{n\rightarrow+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ equivale a dimostrare che esistono dei valori di n per i quali è soddisfatta la disequazione: $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \ \ (2)$

Poiché $n>0 \ \Rightarrow \ \frac{1}{n} > 0 \quad e\ che \quad \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$, la (2) può essere scritta $\frac{1}{n} < \varepsilon \ \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Ponendo $n_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$ abbiamo verificato che esistono elementi della successione aventi indice $n > n_\varepsilon$ che verificano la disequazione $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon$.Possiamo quindi affermare che: $\lim_{n\rightarrow+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

Per meglio capire la definizione di limite supponiamo di aver scelto $\varepsilon = \frac{1}{10}$.

Poiché $\frac{1}{\varepsilon} = 10$, scegliamo il dodicesimo termine (n>10) della successione $a_{12} = \frac{13}{12}$ e osserviamo che $1 - \frac{1}{10} < \frac{13}{12} < 1 + \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{9}{10} < \frac{13}{12} < \frac{11}{10} \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}9 < 1{,}08 < 1{,}1$.

Esempio 2

Verificare che $\lim_{n \to +\infty} \frac{3n^2}{n^2+1} = 3$ (1)

equivale a dimostrare che $\left| \frac{3n^2}{n^2+1} - 3 \right| < \varepsilon$. Osserviamo che: $\left| \frac{-3}{n^2+1} \right| < \varepsilon. \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{n^2+1} < \varepsilon$ e questa ha come soluzioni: $n < -\sqrt{\frac{3}{\varepsilon} - 1} \quad e \quad n > \sqrt{\frac{3}{\varepsilon} - 1}$. (con $\frac{3}{\varepsilon} - 1 > 0$).

Poiché la prima disuguaglianza è impossibile, deve essere $n > \sqrt{\frac{3}{\varepsilon} - 1}$.

Ponendo $n_\varepsilon = \sqrt{\frac{3}{\varepsilon} - 1} \quad \exists\, n > n_\varepsilon$ per i quali vale la (1).

Se $\varepsilon = 0{,}1 \quad per \quad n > n_\varepsilon = \sqrt{29}$, scegliamo il sesto termine della successione $a_6 = \frac{39}{37}$ e verifichiamo che: $2{,}90 < 2{,}91 < 3{,}1$.

Limiti di successioni divergenti

- Diciamo che la successione $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ **ha limite** $+\infty$ per $n \to +\infty$, quando, scelto ad arbitrio un numero M>0, grande a piacere, è possibile determinare in corrispondenza ad esso un numero n_M tale che per ogni n> n_M si ha a_n > M.

Si dice in tal caso che la successione è **positivamente divergente** e si scrive

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty .$$

Esempio 3

Verificare che $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2+1}{n} = +\infty$ (1)

Equivale a dimostrare che esistono elementi della successione per cui $\frac{n^2+1}{n} > M$ (2).

Poiché n>0 consideriamo solamente $n^2 - Mn + 1 > 0 \quad (con\ \Delta = M^2 - 4 > 0)$.

Osserviamo che la (2) è verificata per $n < \frac{M - \sqrt{\Delta}}{2} \vee n > \frac{M + \sqrt{\Delta}}{2}$.

Posto: $n_M = \dfrac{M+\sqrt{M^2-4}}{2}$ la (1) è verificata $\forall n > n_M$.

Infatti se M=100 si ha: n_M=99,98 e, per n=100 $\dfrac{10000+1}{100} > 100.$

- Diciamo che la successione $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ **ha limite** $-\infty$ per $n \to +\infty$, quando, scelto ad arbitrio un numero M>0, grande a piacere, è possibile determinare in corrispondenza ad esso un numero n_M tale che per ogni n> n_M si ha a_n < -M.

Si dice in tal caso che la successione è **negativamente** divergente e si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty\,.$$

Verificare che $\lim_{n\to+\infty}(n-2n^2) = -\infty$

equivale a dimostrare che esistono elementi della successione per cui: $n - n^2 < -M$ (2).

Risolvendo si ha: $n > \dfrac{1+\sqrt{1+8M}}{4} = n_M$. Per M=100 ed n_M=30 risulta (30-1800)< -100.

NOTA

Esistono successioni che non ammettono né limite finito né limite infinito e non sono né convergenti né divergenti. Esse si dicono indeterminate. Ad es. $a_n=(-1)^n$.

Il numero e

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Sviluppando la potenza del binomio mediante la formula di Newton otteniamo:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0}1^{n-0}\left(\frac{1}{n}\right)^0 + \binom{n}{1}1\,\frac{1}{n} + \binom{n}{2}1\,\frac{1}{n^2} + \ldots\ldots\ldots + \binom{n}{n}1^0\,\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + n\,\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2\,!}\,\frac{1}{n^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n^n}.$$

Essendo vera l'uguaglianza:

$$\frac{1}{n^n} = \frac{1}{n\,!}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\ldots\ldots\ldots\cdot\frac{n-(n-1)}{n} =$$

$$= \frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\ldots\ldots\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$ si ha:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

All'aumentare di n il secondo membro dell'uguaglianza cresce perché cresce il numero dei termini che sono tutti positivi. La successione è crescente e quindi esiste il limite per n che tende a $+\infty$.
Poiché le quantità tra parentesi sono tutte minori di 1 ed essendo $\frac{1}{2!}<\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3!}<\frac{1}{2^2}$; ....; $\frac{1}{n!}<\frac{1}{n^{n-1}}$ possiamo scrivere:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+........+\frac{1}{n^{n-1}}\right).$$

Osservando che la quantità tra parentesi è la somma dei primi n termini di una progressione geometrica di ragione $q=\frac{1}{2}$ e ricordando che $S_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q}$ si ha:

$$S_n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$ Quindi $2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) < 3.$

La successione data ha per limite un numero compreso tra 2 e 3. Detto numero è irrazionale ed è la base dei logaritmi naturali o neperiani. Il suo valore è 2,71828…..
Ad Eulero è dovuta la dimostrazione della sua irrazionalità.