Dal grafico di $f(x)$ a quello della sua derivata e viceversa

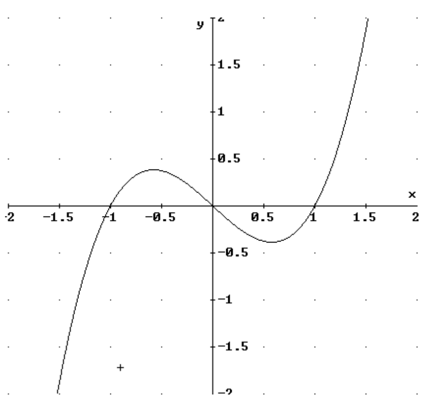
Supponendo che le funzioni esaminate siano continue e derivabili due volte negli intervalli considerati, cerchiamo di ricavare dal grafico di una funzione quello della sua derivata e, viceversa, di ricavare dal grafico di una funzione quello di una sua primitiva.

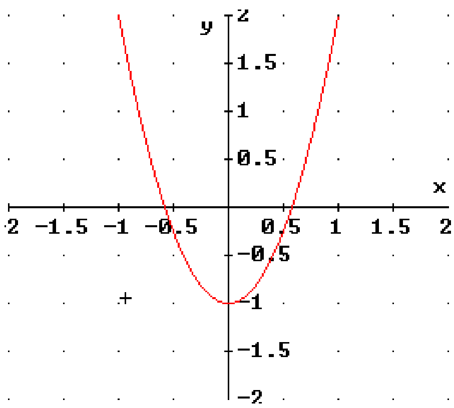
Dal grafico di una funzione a quello della sua derivata

osservazioni su $f(x)$	conseguenze per $\varphi(x) = f'(x)$
Negli intervalli in cui $f'(x) > 0$ e negli intervalli in cui $f'(x) < 0$ Quindi, se $f(x)$ è crescente (decrescente)	$\varphi(x) > 0$ $\varphi(x) < 0$ $\varphi(x)$ è positiva (negativa);
Nei punti in cui $f'(x) = 0$ Se $f(x)$ ha tangente orizzontale	$\varphi(x) = 0$ $\varphi(x)$ interseca l'asse delle ascisse;
Negli intervalli in cui $f''(x) > 0$ e negli intervalli in cui $f''(x) < 0$	$\varphi'(x) > 0$ $\varphi'(x) < 0$
Nei punti in cui $f''(x) = 0$ Quindi, nei punti di flesso di $f(x)$	$\varphi'(x) = 0$ $\varphi(x)$ ha tangente orizzontale
Se la $f(x)$ è pari Se la $f(x)$ è dispari	$\varphi(x)$ è dispari $\varphi(x)$ è pari

Consideriamo il seguente esempio:

Ricavare dal grafico di $f(x) = x^3 - x$ quello della sua derivata $\varphi(x) = 3x^2 - 1$





Negli intervalli $\left]-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$ e $\left]\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right[$ dove $f(x)$ risulta crescente la $\varphi(x)$ è positiva;

nell'intervallo $\left]-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right[$ la $f(x)$ è decrescente quindi $\varphi(x)$ deve essere negativa;

nei punti in cui la $f(x)$ ha tangente orizzontale, $\varphi(x)$ interseca l'asse delle ascisse;
negli intervalli in cui $f(x)$ ha la concavità verso l'alto (basso) la $\varphi(x)$ è crescente (decrescente);
nell'origine, dove $f(x)$ presenta un punto di flesso, $\varphi(x)$ ha tangente orizzontale;
poiché $f(x)$ è dispari, $\varphi(x)$ è pari.

Dal grafico di una funzione a quello della sua primitiva

Per ricavare il grafico approssimativo di $F(x)$ conoscendo quello di $f(x)$ facciamo le seguenti considerazioni:

Dal grafico di $f(x)$ a quello…	…di una sua primitiva $F(x)$
Negli intervalli in cui $f(x) > 0$ e negli intervalli in cui $f(x) < 0$ Quindi, se $f(x)$ è positiva (negativa);	$F'(x) > 0$ $F'(x) < 0$ $F(x)$ è crescente (decrescente)
Nei punti in cui $f(x) = 0$ $f(x)$ interseca l'asse delle ascisse	$F'(x) = 0$ $F(x)$ ha tangente orizzontale;
Negli intervalli in cui $f'(x) > 0$ e negli intervalli in cui $f'(x) < 0$ Quindi, se $f(x)$ è crescente (decrescente)	$F''(x) > 0$ $F''(x) < 0$ $F(x)$ ha la concavità verso l'alto (basso)
Nei punti in cui $f'(x) = 0$ Quindi, se $f(x)$ ha tangente orizzontale	$F''(x) = 0$ $F(x)$ presenta dei punti di flesso

Osserviamo il seguente esempio dove $f(x) = \ln x$ e $F(x) = x(\ln x - 1) + c$

- Poiché la funzione $f(x)$ possiede infinite primitive che differiscono tra loro per una costante, infiniti sono i grafici che possiamo prendere in considerazione per risolvere il nostro problema. Essi, come è possibile vedere nella figura (1) , risultano tra loro traslati lungo l'asse delle ordinate.

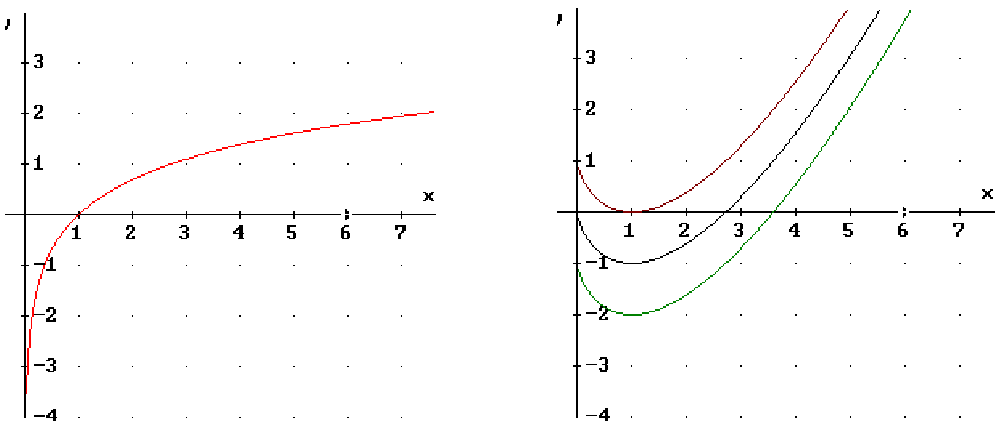
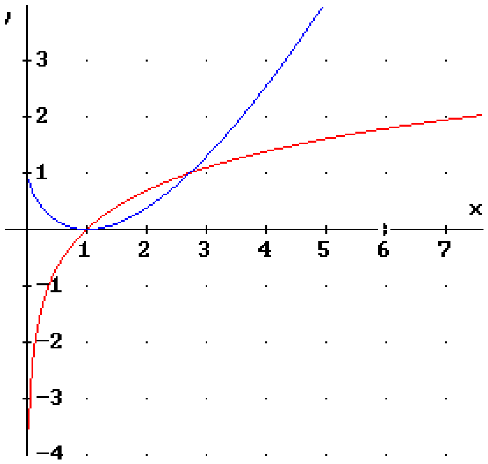


fig. (1)

Se tra di essi scegliamo quello che passa per il punto $(1;0)$



osserviamo che:

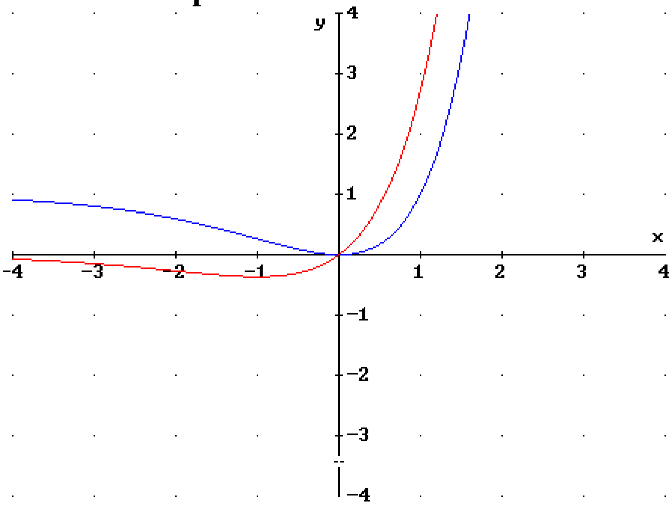
nell'intervallo $]0;1[$ $f(x)<0$ $F(x)$ è decrescente

nell'intervallo $]1;+\infty[$ $f(x)>0$ $F(x)$ è crescente

nel punto $(1;0)$ $f(x)=0$ $F(x)$ ha un punto stazionario (tg orizzontale)

inoltre, essendo $f'(x)>0 \quad \forall x \in D$ $F(x)$ deve avere sempre la concavità verso l'alto.

Secondo esempio



nell'intervallo $]-\infty;0[$ $f(x)<0$ $F(x)$ è decrescente

nell'intervallo $]0;+\infty[$ $f(x)>0$ $F(x)$ è crescente

nel punto $(0;0)$ $f(x)=0$ $F(x)$ ha un punto a tangente orizzontale

inoltre, essendo $f'(-1)=0$ $F(x)$ presenta un punto di flesso.