Si studino le funzioni $y = \dfrac{2}{x^2}$; $y = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$ e si verifichi che i loro punti comuni appartengono alla stessa retta. (sessione suppletiva 76/77).

1. Studio di $y = \dfrac{2}{x^2}$

- L'insieme di esistenza si ottiene escludendo i valori che annullano il denominatore; quindi $D_f = \mathbb{R}_0 \quad \Leftrightarrow \quad]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$;

- Per determinare il segno di $f(x)$ consideriamo $\dfrac{2}{x^2} > 0$ e osserviamo che $f(x) > 0 \quad \forall x \in D_f$;

- Verifichiamo l'andamento della funzione agli estremi del campo di esistenza mediante $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to 0^{\pm}} f(x) = +\infty$ Dai risultati ottenuti possiamo affermare che la funzione ha gli asintoti $y = 0 \quad e \quad x = 0$;

- Per determinare gli eventuali estremi relativi studiamo il segno della derivata prima: $y'(x) = -\dfrac{4}{x^3}$ Notiamo che

  0

  $f(x)$ ↗ ↘

- Per determinare gli eventuali punti di flesso studiamo il segno della derivata seconda. Ed essendo $y''(x) = \dfrac{12}{x^4}$ possiamo concludere che il grafico della funzione volge sempre la concavità verso l'alto.

2 Studio di $y = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$

- L'insieme di esistenza è uguale a quello della prima funzione;

- Il segno e gli eventuali punti d'intersezione con l'asse delle ascisse li otteniamo da: $x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)(x^2 - 4x + 4) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)(x-2)^2 \geq 0$ che fornisce: $f(x) > 0 \quad \forall x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[$ $\quad f(x) = 0 \quad per \quad x = -1 \quad e \quad x = 2.$

- Essendo $\lim_{x\to 0^{\pm}} f(x) = +\infty$ la funzione ha l'asintoto $x = 0$ Inoltre, poiché la differenza tra il grado del numeratore e quello del denominatore è 1 la funzione possiede anche l'asintoto obliquo.Per determinarlo calcoliamo: $m = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1 \quad e \quad q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = -3$. Da cui si ha: $y = x - 3$

- Studiamo il segno della derivata prima:

$$y'=\frac{(3x^2-6x)x^2-2x(x^3-3x^2+4)}{x^4} \Leftrightarrow y'=\frac{x(x^3-8)}{x^4}$$ Essa sarà positiva quando

$x(x^3-8)>0$ 0 2

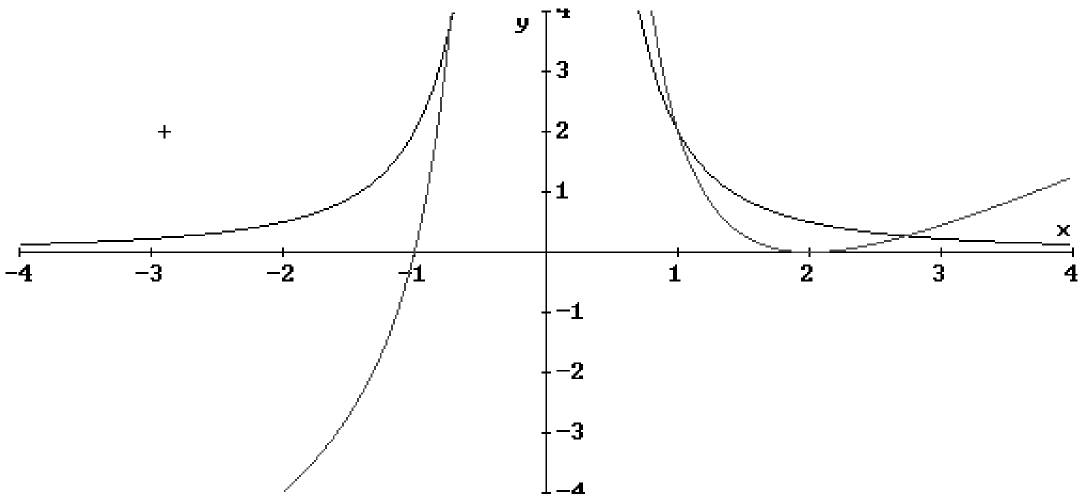
quindi $f(x)$ ↗ ↘ ↗

la funzione ha un punto di minimo in $A(2;0)$

- Studiamo il segno della derivata seconda.

Poiché da $y'=\dfrac{x^3-8}{x^3} \quad \Rightarrow \quad y''=\dfrac{3x^5-3x^2(x^3-8)}{x^6} \Leftrightarrow y''=\dfrac{24}{x^4}$

possiamo concludere che il grafico della funzione volge la concavità verso l'alto.



grafici delle funzioni assegnate

- Per determinare i punti comuni alle due curve risolviamo il sistema: $\begin{cases} y=\dfrac{2}{x^2} \\ y=\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^3} \end{cases}$ e

otteniamo: $(x-1)(x^2-2x-2)=0$ Da cui $\begin{matrix} x=1 \\ x=1\pm\sqrt{3} \end{matrix}$ Quindi: $\begin{matrix} P_1(1;2) \\ P_2(1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}) \\ P_3(1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}) \end{matrix}$

Poiché la retta P_2P_3 ha equazione $\dfrac{x-(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})-(1-\sqrt{3})}=\dfrac{y-(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})}$

e le coordinate di P_1 la soddisfano, i punti P_1, P_2, P_3 sono allineati.