STUDIO DI UNA FUNZIONE $y = f(x)$

1) DOMINIO (per le funzioni più ricorrenti) si pone:

- denominatore diverso da zero, se la funzione è razionale fratta;
- radicando maggiore o uguale a zero, se f(x) è irrazionale di indice pari;
- argomento del logaritmo maggiore di zero, se la funzione è logaritmica.

2) INTERSEZIONE CON GLI ASSI E SEGNO

- Per determinare le eventuali intersezioni della curva con l'asse x e con l'asse y, si pone $y = f(x)$ in sistema rispettivamente con $y = 0$ e $x = 0$; (…se $\in D_f$);
- Per determinare il segno della funzione e stabilire gli intervalli in cui la curva si trova nel semipiano positivo o negativo, occorre risolvere $f(x) \geq 0$.

3) **RICERCA DI EVENTUALI SIMMETRIE o PERIODICITA'** rispetto:

- All'asse x quando $\varphi(-y) = \varphi(y)$ (la funzione deve essere monotona affinché si possa avere $x = \varphi(y)$);
- All'asse y quando $f(-x) = f(x)$ (la f(x) è pari);
- All'origine quando $f(-x) = -f(x)$ (la funzione è dispari);

Nota: affinché una curva di equazione $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ...+ a_{n-1} x + a_n$ sia simmetrica rispetto all'origine, occorre che: a) f(x) sia di grado dispari; b) i coefficienti di indice dispari siano nulli.

- La $y = f(x)$ ha periodicità T se $f(x+T) = f(x)$.

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni periodiche di periodo T_1 e T_2, la funzione somma $f(x) \pm g(x)$ avrà come periodo il m.c.m. di T_1 e T_2. Se la funzione è del tipo $f(x) = A \operatorname{sen}(\omega x + \varphi)$ il periodo è $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

4) **COMPORTAMENTO AGLI ESTREMI DEL DOMINIO e ASINTOTI**

- La curva presenta un asintoto verticale di equazione $x = x_0$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ tali punti sono di solito quelli che sono stati esclusi dal dominio (punto 1).
- Se invece $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = k$, la curva possiede un asintoto orizzontale di equazione $y = k$.
- Se $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ la curva potrebbe presentare un asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$, in cui: $m = \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ e $q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$.

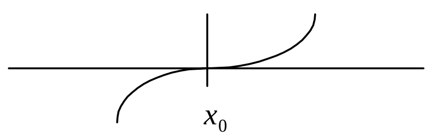
Una curva rappresentata da un'equazione razionale fratta possiede asintoto obliquo e non ha asintoto orizzontale quando la differenza tra i gradi del numeratore e del denominatore è uguale a 1.

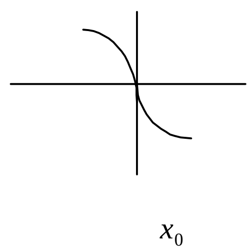
5) **MASSIMI, MINIMI e FLESSI**

la ricerca dei massimi e dei minimi può essere effettuata nei seguenti modi:

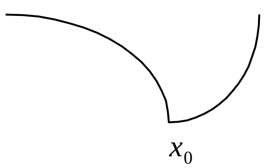
- Si determinano gli intervalli in cui la funzione è crescente o decrescente mediante il segno della derivata prima $f'(x) \geq 0$. (consigliabile soprattutto per le funzioni razionali);
- si determinano gli "zeri" della derivata prima e si esamina il comportamento delle derivate successive calcolate in tali punti.
  Se $f''(x_0) > 0$ il punto x_0 è un minimo; se $f''(x_0) < 0$ il punto è un massimo, se $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) > 0$ il punto è un flesso ascendente, se $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) < 0$ il punto x_0 è un flesso discendente.

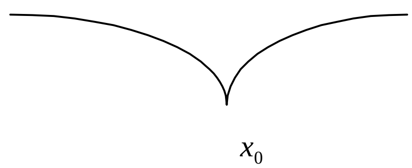
I punti di flesso possono essere determinati mediante il segno della derivata seconda che permette di conoscere gli intervalli in cui la funzione ha la concavità rivolta verso l'alto o verso il basso.
Il punto x_0 è un flesso a tangente orizzontale quando $f'(x_0) = 0$, è a tangente verticale quando $f'(x_0) = \pm\infty$.





NOTE
Occorre far rilevare che i punti di massimo o di minimo relativi e quelli di flesso sono da accettare solo se appartenenti al dominio della funzione. A tal proposito è utile verificare sempre il dominio della derivata prima. La funzione potrebbe essere continua in x_0 ma non essere derivabile in tale punto (vedi punti angolosi).





Una funzione è continua e derivabile in un punto $x_0 \in D$ se si ha rispettivamente:
$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$.