UN .....INSOLITO LIMITE

Per effettuare l'integrazione di una funzione razionale fratta del tipo $\frac{f(x)}{g(x)}$, con $g(x)$ di grado n, è sempre possibile ricondursi al caso in cui il grado di $f(x)$ sia minore del grado di $g(x)$.

In tal caso, se le soluzioni di $g(x)=0$ sono $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ e sono tra loro reali e distinte, si ha :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}$$

dove a_0 è il coefficiente del termine di grado massimo di $g(x)$.
Com'è noto, occorre considerare l'uguaglianza :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{a_0}\left[\frac{K_1}{x-x_1} + \frac{K_2}{x-x_2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{K_n}{x-x_n}\right] \qquad (1)$$

Per determinare la generica costante K_i, moltiplichiamo la (1) per $x-x_i$. e consideriamo il limite:

$$\frac{1}{a_0}\lim_{x\to x_i}\frac{(x-x_i)f(x)}{(x-x_1)\ldots.(x-x_i)\ldots.(x-x_n)} = \frac{1}{a_0}\lim_{x\to x_i}\left[\frac{(x-x_i)K_1}{x-x_1} + \ldots. + K_i + \ldots\ldots + \frac{(x-x_i)K_n}{x-x_n}\right]$$

da cui :

$$\lim_{x\to x_i}\frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots\ldots(x-x_n)} = K_i .$$

Questo metodo operativo, raramente affrontato nei testi di analisi, consente il calcolo rapido delle costanti K_i senza ricorrere all'uso di un sistema lineare.

A cura dei proff. Adolfo Scimone e Vincenzo Zanghi'

Pubblicato sulla rivista "ARCHIMEDE" (luglio/settembre 1996)

Esempio

$$\frac{2x-1}{x^2-4x+3}=\frac{2x-1}{(x-3)(x-1)}=\frac{k_1}{(x-3)}+\frac{k_2}{(x-1)} \quad (*)$$

Per determinare k_1 moltiplichiamo la (*) per $(x-3)$ e calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to 3}\frac{(2x-1)\cancel{(x-3)}}{(x-1)\cancel{(x-3)}}=\lim_{x\to 3}\left(\frac{k_1\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}+\frac{k_2(x-3)}{x-1}\right) \text{ e ricaviamo: } \qquad \frac{5}{2}=k_1$$

Per ottenere il valore di k_2 operiamo allo stesso modo

$$\lim_{x\to 1}\frac{(2x-1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x-3)}=k_2 \qquad -\frac{1}{2}=k_2$$

Quanto sopra detto può essere applicato al calcolo dell'integrale

$$\int\frac{2x-1}{x^2-4x+3}dx=\frac{5}{2}\int\frac{1}{x-3}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}dx=\ln\left[(x-3)^2\sqrt{\left|\frac{x-3}{x-1}\right|}\right]+c\ .$$