Trasformazione della somma o della differenza di due radicali semplici in un radicale doppio

Ci proponiamo di ricavare dalla nota uguaglianza $\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} = \sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ (1)

i valori di a e b conoscendo quelli di $k = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}$ e $p = \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$ $(p, k \in \mathbb{R})$.

A tal fine, consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} = k \\ \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} = p \end{cases}$$

elevando al quadrato otteniamo:

$$\begin{cases} a+\sqrt{a^2-b} = 2k^2 \\ a-\sqrt{a^2-b} = 2p^2 \end{cases}$$

sommando e sottraendo, membro a membro, le due equazioni, ricaviamo:

$$\begin{cases} a = k^2 + p^2 \\ \sqrt{a^2-b} = k^2 - p^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = k^2 + p^2 \\ b = a^2 - \left(k^2 - p^2\right) \end{cases}$$

e, tenendo conto della (1) possiamo scrivere:

$$k \pm p = \sqrt{\left(k^2+p^2\right) \pm \sqrt{\left(k^2+p^2\right) - \left(k^2-p^2\right)^2}}$$

$$\boxed{k \pm p = \sqrt{\left(k^2+p^2\right) \pm 2pk}} \qquad (2)$$

Esempio:

Trasformare la differenza $\sqrt{10} - \sqrt{2}$ in un radicale doppio.

Essendo $k = \sqrt{10}$ e $p = \sqrt{2}$ la (2) fornisce:

$$a = k^2 + p^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 12$$

$$b = 2pk = 2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{20} = 4\sqrt{5}$$

quindi: $\sqrt{10} - \sqrt{2} = \sqrt{12 - 4\sqrt{5}} = 2\sqrt{3 - \sqrt{5}}$