Storia della geometria

Introduzione

Matematica, vocabolo di origine greca, significa semplicemente "sapere". I greci ritenevano il pensiero matematico espressione della razionalità umana. Però, come è facile notare, nulla è detto di ciò che deve essere indagato. Rifacendosi ad una battuta del filosofo inglese Bertrand Russel, possiamo dire: "la matematica è una scienza in cui non si sa di che cosa si parla e non si sa se ciò che si dice è vero…!"

Sappiamo che la matematica è stata inizialmente concepita come scienza della *quantità discreta* (dei numeri naturali) e come scienza della *quantità continua* (delle figure geometriche. Essa nacque quindi dall'esigenza di considerare oggetti astratti in modo rigoroso e coerente.

L'esatta conoscenza dei numeri ebbe origine presso i Fenici per le loro esigenze commerciali, mentre la conoscenza geometrica nacque presso gli Egiziani per la necessità di misurare i terreni che periodicamente venivano inondati dal Nilo.

Origini

Per rendere efficace la trattazione di questa scienza è necessario fare riferimento alla sua matrice storica, per distinguere poi gli sviluppi che essa subì con il passare del tempo e capire come si crearono le sue ramificazioni attualmente conosciute e impropriamente ritenute tra loro distinte. La storia della geometria, intesa come scienza razionale, può essere divisa in tre periodi fondamentali: il primo, detto periodo classico, che va dalle sue origini fino alla nascita della geometria analitica, il secondo che va da Rene' Des Cartes alle geometrie non euclidee e il terzo periodo che va da Gauss ai giorni nostri.

Primo periodo

La geometria nasce nel periodo della civiltà greca con Talete (VI a.C.), Pitagora (V a.C.) Eudosso di Cnido (IV a.C.) Archimede (III a.C.), ma soprattutto con Euclide (III a.C.) che raccoglie e ordina nei suoi 13 libri (Elementi) tutte le conoscenze del tempo e dà alla geometria il carattere di scienza assiomatico-deduttiva che trae i suoi principi dall'osservazione di proprietà ritenute "evidenti" (postulati) e ricava le sue conclusioni con deduzioni assolutamente rigorose. Euclide non si chiede se gli enti geometrici esistono nella realtà (critica di Hilbert), ma si preoccupa invece di dare al lettore un aiuto per formarsi l'immagine e poi il concetto dei vari enti geometrici.

Nei primi quattro libri degli Elementi egli espone la geometria piana, nel quinto libro affronta essenzialmente la proporzionalità tra grandezze (teoria di Eudosso), nel sesto affronta lo studio delle figure simili. Nei libri settimo, ottavo e nono sviluppa la teoria dei numeri interi, nel decimo affronta i numeri irrazionali mediante supporti geometrici, nei libri undicesimo, dodicesimo e tredicesimo svolge lo studio dei solidi.

La civiltà romana e quella del Medioevo non portarono importanti contributi innovativi alle conoscenze matematiche.

Durante il Rinascimento italiano assistiamo al sorgere della prospettiva, della geometria proiettiva e della geometria descrittiva. Nello stesso periodo si evolve l'algebra, intesa come disciplina autonoma.

Secondo periodo

Cartesio inventa la geometria analitica. Avvalendosi dei metodi algebrici, del calcolo differenziale e integrale, egli riesce a rappresentare gli enti geometrici e a risolvere problemi di carattere geometrico. La geometria analitica ebbe il grande merito di introdurre una metodologia, quella dell'algebra, o dell'analisi matematica, per la risoluzione dei problemi. Ogni problema geometrico viene ricondotto ad un problema algebrico e viene risolto mediante algoritmi dell'algebra o dell'analisi matematica.

La fusione della geometria con l'algebra e l'Analisi matematica ebbe anche il merito di far nascere la geometria algebrica, proiettiva, descrittiva e differenziale

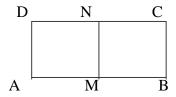
Periodo moderno

Inizia nella seconda metà del XIX secolo ed ha il suo massimo sviluppo con le ricerche effettuate da Karl Friderich Gauss e Bernard Riemann (1800).

L'inizio di questo periodo si può far risalire al gesuita **Gerolamo Saccheri**, che nel 1773 pubblica un'operetta nella quale tenta di dimostrare per assurdo il V postulato di Euclide (postulato della retta parallela). Tale tentativo non si può considerare riuscito, perché la dimostrazione non è raggiunta, anzi, il Saccheri ottiene il risultato opposto a quello desiderato. Partendo dalla negazione della validità del V postulato, crea un insieme di teoremi logicamente legati l'uno all'altro e realizza il primo trattato storico di geometria non euclidea.

Il Saccheri considera un quadrilatero birettangolo isoscele ABCD con gli angoli in A e in B retti e i lati AD e BC uguali. E dimostra che gli angoli C e D sono uguali. Per fare ciò considera i punti medi M e N dei lati AB e CD. Ribalta MBCD su AMND e verifica che questi quadrilateri coincidono, quindi dimostra che gli angoli in C e in D sono uguali.

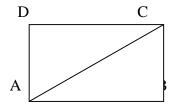
Negando il postulato della retta parallela ammette per assurdo che gli angoli C e D sono o entrambi acuti o entrambi retti o entrambi ottusi.



Considera quindi i seguenti casi:

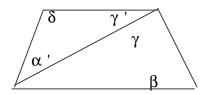
1°) ipotesi dell'angolo acuto	CD > AB	(geometria iperbolica) *
2°) ipotesi dell'angolo retto	CD = AB	(geometria euclidea) *
3°) ipotesi dell'angolo ottuso	CD < AB	(geometria ellittica) *

(*) nomi dovuti a Klein che considerò tali geometrie dal punto di vista della geometria proiettiva, dove non intervengono concetti metrici.



Tracciando la diagonale AC del quadrilatero il Saccheri dimostra il primo e il terzo caso. 1° caso

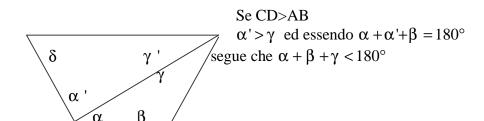
Se
$$\overline{CD} < \overline{AB}$$



$$\alpha' < \gamma$$
 ed essendo $\alpha + \alpha' + \beta = 180^{\circ}$ segue che $\alpha + \beta + \gamma > 180^{\circ}$

La differenza $180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)$ si chiama difetto angolare del triangolo ed è proporzionale all'area del triangolo stesso. Pertanto in detta geometria non si hanno figure simili che non siano anche uguali tra loro.

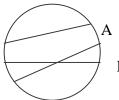
2° caso



Per l'incompatibilità della coesistenza delle tre ipotesi il Saccheri giunge alla conclusione che solo una di esse può essere vera: quella dell'angolo retto.

Gauss, prendendo spunto dall'opera del Saccheri, elabora importanti teoremi di una geometria non euclidea, ma si guarda bene dal pubblicarli, per il timore di essere considerato reazionario dai contemporanei. L'opera avviata da Gauss viene proseguita da Bolyai e Lobacevskij i quali fondano quella geometria che Klein chiamerà iperbolica e affermano che i fondamenti della geometria euclidea non sono che una delle infinite forme che la geometria può assumere come base.

Secondo Gauss, Bolyai e Lobacevskij "per un punto P non appartenente alla retta r passa più di una retta parallela a r". Ne segue una geometria su un piano non più euclideo ma sul "piano di Klein" che è formato dall'insieme dei punti interni a un cerchio e che considera come rette le corde di detto cerchio.

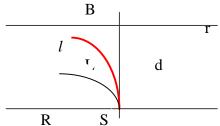


punto improprio della retta a

Le rette passano per uno stesso punto e sono parallele ad a.

Su tale piano sono verificati tutti i postulati della geometria euclidea escludendo naturalmente il V°

Si può giungere al concetto di geometria iperbolica anche per via elementare:

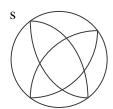


Consideriamo le rette passanti per S ed appartenenti all'angolo retto $R \hat{S} B$. Effettuiamo su dette rette una partizione in due classi: una che contiene le rette parallele ad r, l'altra formata dalle rette che intersecano r. Poiché questa partizione soddisfa le condizioni di continuità di Dedekind, esiste una retta limite $l \in R \hat{S} B$ che è l'elemento separatore delle due classi ed è la retta parallela ad r passante per S.

In detta geometria l'angolo $R\dot{S}L = \alpha < 90^{\circ}$ viene detto angolo di parallelismo corrispondente alla distanza d.

Osserviamo che per d $\rightarrow \alpha$ $\rightarrow \circ$ Mentre per d $\rightarrow \infty$ α $\rightarrow 90^{\circ}$

Nello stesso periodo un altro matematico B. Riemann, allievo di Gauss, nega il V° postulato di Euclide ed afferma che "per un punto P esterno alla retta r non esiste alcuna retta passante per P e parallela ad r". Ne segue una nuova geometria, che Klein chiama ellittica, il cui piano è formato dai punti di una superficie sferica e che considera come rette i cerchi massimi di detta sfera.



Poiché tutte le rette del piano si intersecano in due punti distinti non esiste il concetto di parallelismo.

Successivamente, Felix Klein (1849-1925) stabilì nel suo trattato "programma di Erlangen" (1872) i criteri per una visione unificatrice dei vari rami della "vecchia" scienza geometrica.

Secondo Klein ogni geometria viene classificata secondo un gruppo di trasformazioni che le è caratteristico. Per esempio, la geometria la geometria elementare viene caratterizzata come lo studio delle proprietà delle figure che sono invarianti secondo il gruppo delle congruenze; la geometria delle figure simili come lo studio delle proprietà che sono invarianti per il gruppo delle similitudini (più ampio del precedente). Così procedendo si incontrano la geometria affine e quella proiettiva.