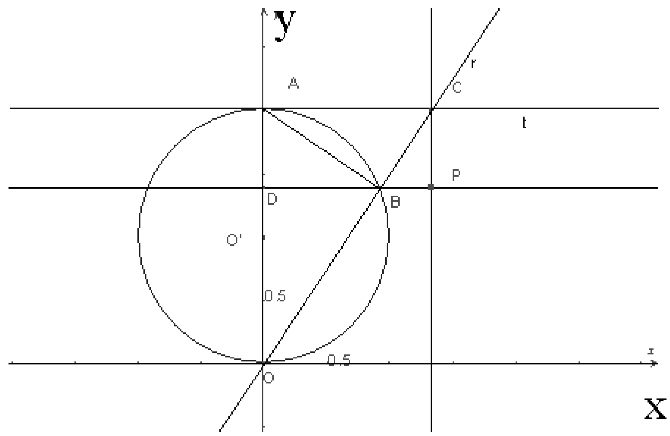
Problema 1 PNI



1)

a) $OD : DB = OA : DP$

I triangoli rettangoli $\triangle OAC$ e $\triangle ODB$ sono simili perché hanno l'angolo $\widehat{AOC}$ in comune

Avremo quindi:

$OD : DB = OA : AC$

Poiché $AC = DP$ otteniamo

$OD : DB = OA : DP$

b) $OC : DP = DP : BC$

Il lato AB è perpendicolare a OB perché il $\triangle ABO$, inscritto in una semicirconferenza, è rettangolo. Inoltre AB è l'altezza relativa all'ipotenusa del triangolo $\triangle OAC$. Applicando il 1° teorema di Euclide avremo:

$OC : AC = AC : BC$

essendo $AC = DP$ avremo

$OC : DP = DP : BC$

2) Fissiamo un sistema di riferimento ortogonale assumendo come asse x la tangente alla circonferenza nel punto O e come asse y la perpendicolare passante per O e per A.

Avremo quindi che $O'\left(0; \frac{a}{2}\right)$

L'equazione della circonferenza γ, essendo $r = \frac{a}{2}$ avrà equazione

$$\gamma : x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$\gamma : x^2 + y^2 - ay = 0$$

Una generica retta r passante per O ha equazione:

$$y = mx$$

Quindi, per determinare le coordinate del punto B risolviamo il sistema formato dalla circonferenza γ e dalla retta r

$$B = \gamma \cap r : \begin{cases} x^2 + y^2 - ay = 0 \\ y = mx \end{cases}$$

$$x^2 + m^2x^2 - max = 0$$

e quindi

$$x=\frac{am}{m^2+1} \qquad y=\frac{am^2}{m^2+1} \quad \Rightarrow \quad B\left(\frac{am}{m^2+1};\frac{am^2}{m^2+1}\right)$$

Per determinare le coordinate del punto C risolviamo il sistema formato dalle rette *t* ed *r*

$$C=t\cap r:\begin{cases} y=a \\ y=mx \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C\left(\frac{a}{m};a\right)$$

L'equazione della retta PB è

$$y=\frac{am^2}{m^2+1}$$

L'equazione della retta PC è

$$x=\frac{a}{m}$$

Il punto P intersezione fra le rette PB e PC ha coordinate

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{m} \\ y=\dfrac{am^2}{m^2+1} \end{cases}$$

Eliminando il parametro m otteniamo l'equazione cartesiana del luogo geometrico Γ

Essendo $m=\frac{a}{x}$ avremo

$$y=\frac{a\dfrac{a^2}{x^2}}{\dfrac{a^2}{x^2}+1}=\frac{a^3}{x^2+a^2}$$

$$\Gamma: y=\frac{a^3}{x^2+a^2} \quad \text{con} \quad a>0$$

3) $y=\frac{a^3}{x^2+a^2}$

Il dominio della funzione è

$\text{dom } f = \left]-\infty;+\infty\right[$

Interseca l'asse y nel punto $A(0;a)$ e non interseca l'asse x , inoltre la funzione è pari.

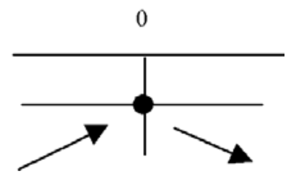
Essendo $a>0$ risulta sempre positiva.

Condizioni agli estremi

Poiché $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a^3}{x^2+a^2}=0$ la curva possiede l'asintoto orizzontale di equazione $y=0$

Studio della derivata prima

$$y'=-\frac{2a^3x}{\left(x^2+a^2\right)^4}\geq 0 \quad \text{per} \quad x\leq 0 \qquad \text{quindi}$$



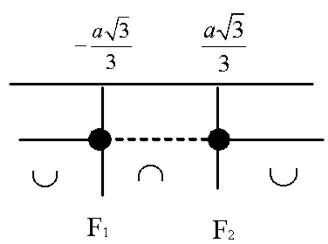
avremo quindi un massimo per $x=0 \quad \Rightarrow \quad (0;a)$

Studio derivata seconda

$$y''=-\frac{2a^3\left(x^2+a^2\right)^2-4x\left(x^2+a^2\right)2a^3x}{\left(x^2+a^2\right)^4}=-\frac{2a^3\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+a^2-4x^2\right)}{\left(x^2+a^2\right)^4}$$

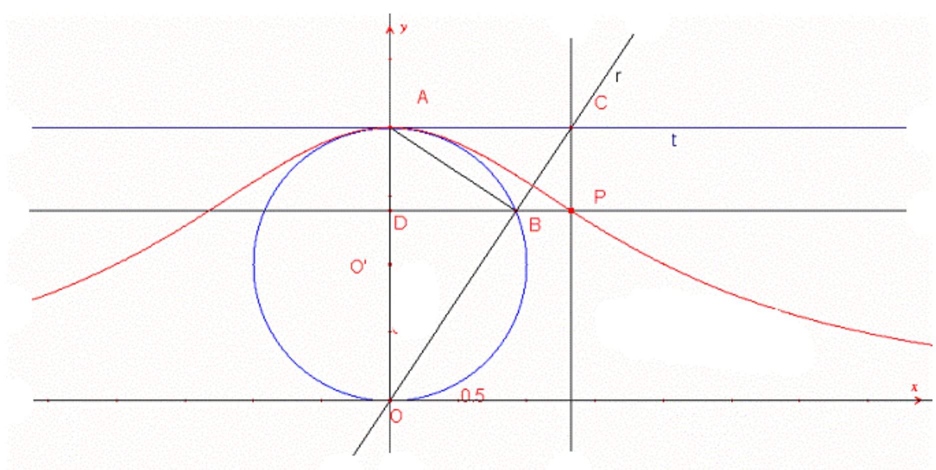
$$y''=\frac{2a^3\left(3x^2-a^2\right)}{\left(x^2+a^2\right)^4}\geq 0$$

si ha $3x^2-a^2\geq 0$ $\qquad x=\pm\frac{a\sqrt{3}}{3}$ e quindi



La curva presenta quindi due flessi $F_1\left(-\frac{a\sqrt{3}}{3};\frac{3}{4}a\right)$; $\quad F_2\left(\frac{a\sqrt{3}}{3};\frac{3}{4}a\right)$

Il grafico è



4) L'area compresa fra la curva Γ e il suo asintoto orizzontale sarà

$$S = 2\int_0^{+\infty} \frac{a^3}{x^2+a^2}dx = 2\lim_{k\to+\infty}\int_0^k \frac{a^3}{x^2+a^2}dx = 2\lim_{k\to+\infty} a^2\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^k$$

$$S = 2a^2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi a^2$$

L'area del cerchio S_1 è

$$S_1 = \pi\frac{a^2}{4}$$

per cui $S = 4S_1$.