

Problema 2 PNI

Affinché la funzione sia pari deve essere

$$f(x) = f(-x)$$

$$a \cdot 2^x + b \cdot 2^{-x} + c = a \cdot 2^{-x} + b \cdot 2^x + c \quad \text{cioè}$$

$$a \cdot (2^x - 2^{-x}) = b \cdot (2^x - 2^{-x}) \quad \Rightarrow \quad a = b$$

$$f(0) = 2$$

$$a + b + c = 2$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{2 \ln 2}$$

$$\int_0^1 (a \cdot 2^x + b \cdot 2^{-x} + c) dx = \left[\frac{a \cdot 2^x}{\ln 2} + \frac{b \cdot 2^{-x}}{\ln 2} + cx \right]_0^1 = \frac{2a}{\ln 2} - \frac{b}{2 \ln 2} + c - \frac{a}{\ln 2} + \frac{b}{\ln 2}$$

Si ha il sistema

$$\begin{cases} a = b \\ a + b + c = 2 \Rightarrow c = 2 - 2a \\ \frac{2a}{\ln 2} - \frac{b}{2 \ln 2} + c - \frac{a}{\ln 2} + \frac{b}{\ln 2} = \frac{3}{2 \ln 2} \end{cases} \quad \text{cioè}$$

$$\frac{3a}{2 \ln 2} + c = \frac{3}{2 \ln 2}$$

$$c = \frac{3}{2 \ln 2} - \frac{3a}{2 \ln 2} \quad \text{essendo } c = 2 - 2a \quad \text{avremo}$$

$$2 - 2a = \frac{3}{2 \ln 2} - \frac{3a}{2 \ln 2}$$

$$2 - \frac{3}{2 \ln 2} = \left(2 - \frac{3}{2 \ln 2} \right) a \quad \text{e quindi}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

Sostituendo otteniamo la funzione

$$g(x) = 2^x + 2^{-x}$$

Studio della funzione

$$\text{dom } g(x) =]-\infty; +\infty[$$

la funzione è pari, quindi l'asse y è l'asse di simmetria

per $x = 0 \Rightarrow y = 2$ interseca quindi l'asse y nel punto (0; 2) e non interseca l'asse x.

La funzione è sempre positiva.

Condizioni agli estremi dell'insieme di esistenza

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2^x + 2^{-x} = +\infty$$

inoltre, essendo

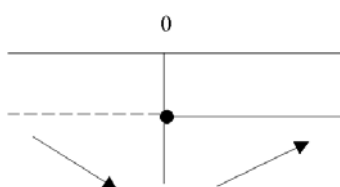
$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2^x + 2^{-x}}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^H = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2^x \ln 2 - 2^{-x} \ln 2) = +\infty$$

la curva non ha asintoti obliqui

Studio della derivata prima

$$g'(x) = 2^x \ln 2 - 2^{-x} \ln 2 = \ln 2 (2^x - 2^{-x}) \geq 0 \quad \text{quindi}$$

$$2^x - 2^{-x} \geq 0 \quad \text{da cui} \quad x \geq 0$$



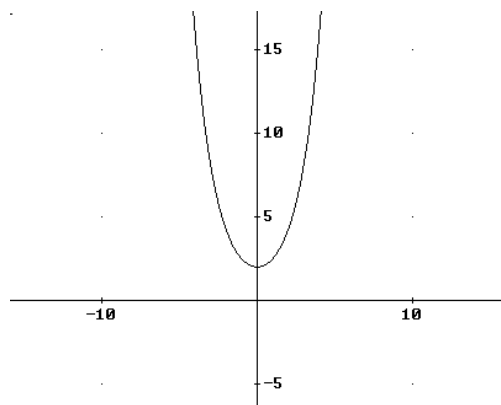
per $x = 0$ si ha un minimo $g(0) = 2 \Rightarrow m(0; 2)$

Studio della derivata seconda

$$g''(x) = \ln 2 (2^x \ln 2 + 2^{-x} \ln 2) = \ln^2 2 (2^x + 2^{-x}) \geq 0 \quad \text{cioè}$$

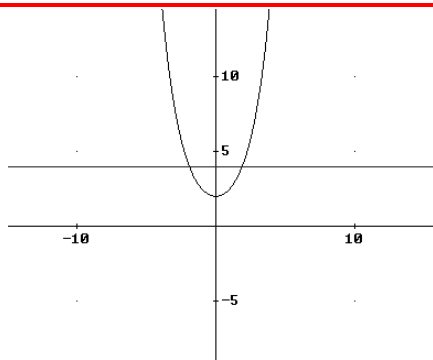
$$2^x + 2^{-x} \geq 0$$

quindi risulta sempre positiva per cui la $g(x)$ volge la concavità verso l'alto. Si ha il grafico



Si ha

$$\begin{cases} y = 4 \\ y = 2^x + 2^{-x} \end{cases} \quad \text{e quindi}$$



$$2^x + 2^{-x} = 4 \quad 2^x + \frac{1}{2^x} = 4 \quad 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 1 = 0 \quad 2^x = 2 \pm \sqrt{3} \quad \text{da cui}$$

$$x = \log_2(2 \pm \sqrt{3}) \cong 1,89$$

Indichiamo con $\pm\alpha$ le ascisse dei punti in cui la curva incontra la retta.

Usando il metodo di bisezione avremo

$$\varphi(1) = 2 + \frac{1}{2} - 4 = \frac{4+1-8}{2} = -\frac{3}{2} \cong -0,81$$

$$\varphi(2) = 4 + \frac{1}{4} - 4 = \frac{1}{4} = 0,25 \quad \text{per cui}$$

$$1 < \alpha < 2 \quad \text{si ha}$$

$$x_1 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$\varphi\left(\frac{3}{2}\right) = -0,81 \quad \text{quindi}$$

$$\frac{3}{2} < \alpha < 2$$

$$x_2 = \frac{\frac{3}{2} + 2}{2} = \frac{7}{4} = 1,75$$

$$\varphi\left(\frac{7}{4}\right) = -0,33 \quad \text{per cui}$$

$$\frac{7}{4} < \alpha < 2 \quad \text{ecc.}$$

avremo quindi

$$1,75 < \alpha < 2 \quad \text{e per simmetria} \quad -2 < \alpha < -1,75$$

(non è chiara l'utilità di usare il metodo iterativo)

L'area racchiusa tra $r: y = 4$ e G è data da

$$S = 2 \int_0^\alpha 4 - (2^x + 2^{-x}) dx = 2 \left[4x - \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{2^{-x}}{\ln 2} \right]_0^\alpha = 2 \left(4\alpha - \frac{2^\alpha}{\ln 2} + \frac{2^{-\alpha}}{\ln 2} \right) \cong 5,20$$

$$I = \int \frac{1}{g(x)} dx = \int \frac{1}{2^x + 2^{-x}} dx = \int \frac{2^x}{2^{2x} + 1} dx$$

ponendo $2^x = t$ avremo $2^x \ln 2 \cdot dx = dt$ $2^x \cdot dx = \frac{dt}{\ln 2}$ e quindi

$$I = \frac{1}{\ln 2} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{\ln 2} \operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{\ln 2} \operatorname{arctg} 2^x + c$$

La simmetria rispetto alla retta $y = 4$ ha equazioni

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases} \text{ cioè } \begin{cases} x \rightarrow x \\ y \rightarrow 8 - y \end{cases} \text{ avremo pertanto}$$

$$8 - y = 2^x + 2^{-x}$$

e quindi

$$g'(x) = y = 8 - 2^x - 2^{-x}$$

Il grafico richiesto è

