Quesiti a risposta aperta

1. Fai un esempio di funzioni a cui non è possibile applicare il teorema di Cauchy in un dato intervallo $[a;b]$ e giustifica il motivo.
2. Determina gli intervalli in cui $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$ è crescente o decrescente.
3. Determina per quali valori di $k\in\mathbb{R}$ la funzione $f(x)=\frac{kx-x^2}{x^2-5x+6}$ non ha estremi relativi.
4. Dimostra che la derivata di $f(x)=sen^2x$ è $f'(x)=2\ sen\,x\cos x$.
5. Verifica che il $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{sen\,x}=0$

Soluzioni

1. $\begin{array}{l} f(x)=x^3-3x \\ g(x)=x-x^2 \end{array}$ in $I=[0;1]$ $\quad g'(x)=0 \quad per \quad x=\frac{1}{2}$
2. $f'(x)>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}:0<x<1$
3. $k=5$
4. $\lim_{h\to0}\frac{sen^2(x+h)-sen^2x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{[sen(x+h)-sen\,x][sen(x+h)+sen\,x]}{h}$ per le formule di prostaferesi si ha: $\lim_{h\to0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)sen\frac{h}{2}\ \cdot\ 2\,sen\left(x+\frac{h}{2}\right)\cos\frac{h}{2}}{h}$ da cui si ricava: $\lim_{h\to0}\frac{2\,sen\,h}{h}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)sen\left(x+\frac{h}{2}\right)=2\,sen\,x\cos x$
5. $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-x^2)}{sen\,x}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{2x}{1-x^2}}{\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{(x^2-1)\cos x}=0$