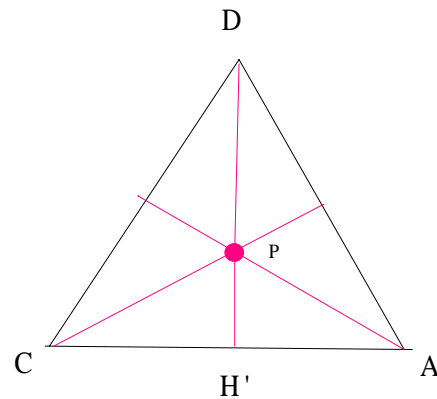
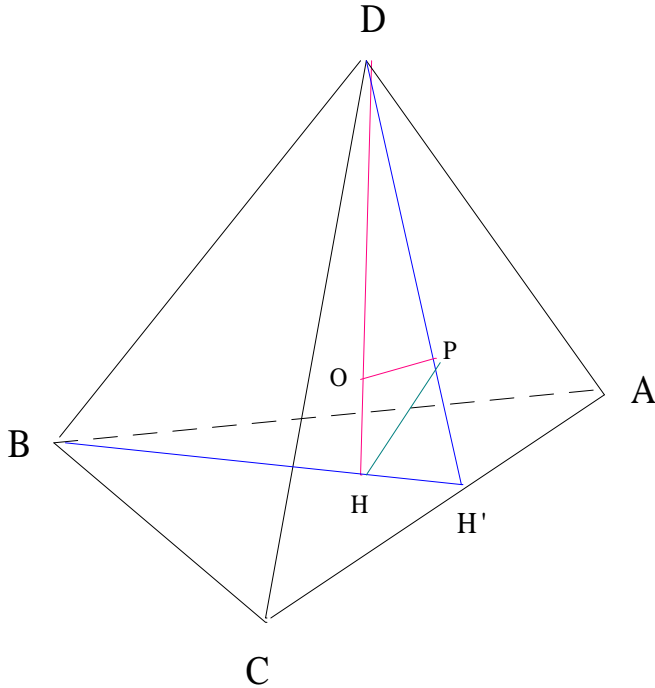


Problema 1

spigolo = l



$$DH' = \frac{l}{2}\sqrt{3}$$

a) $A_{faccia} = \frac{l^2}{4}\sqrt{3}$ $BH' = DH' = \frac{l}{2}\sqrt{3}$ $HH' = \frac{1}{3}BH' = \frac{l}{6}\sqrt{3}$

Dal triangolo rettangolo DHH' ricaviamo: $DH = \sqrt{DH'^2 - HH'^2} = \sqrt{\frac{3}{4}l^2 - \frac{3l^2}{36}} = \sqrt{\frac{2}{3}l^2} = l\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Per la similitudine tra $\triangle DOP$ e $\triangle DHH'$ possiamo scrivere: $\frac{DO}{OP} = \frac{DH'}{HH'}$

$\frac{DH - OH}{OP} = \frac{DH'}{HH'}$ e, sostituendo, si ha:

$$\frac{l\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - r}{r} = \frac{\frac{l}{2}\sqrt{3}}{\frac{l}{6}\sqrt{3}} \Rightarrow l\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - r = 3r \Rightarrow r = \frac{l}{2\sqrt{6}}$$

essendo $V = \frac{1}{3}A_b h$ si ha $V = \frac{1}{3} \frac{l^2}{4} \sqrt{3} l \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{12} l^3 \sqrt{2}$

Inoltre, $S = 4 \frac{l^2}{4} \sqrt{3} = l^2 \sqrt{3}$

Per cui, otteniamo
$$V = \frac{1}{12} \cdot l^2 \cdot l\sqrt{2} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{12} l^2 \sqrt{3} \cdot l \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{12} S \cdot 4r = \frac{1}{3} Sr$$

$$BH' = DH'$$

b) $\triangle HPH'$ simile $\triangle H'DB$ perché
$$\begin{cases} H'P = \frac{1}{3} DH' \\ HH' = \frac{1}{3} BH' \end{cases} \Rightarrow H'P = HH'$$

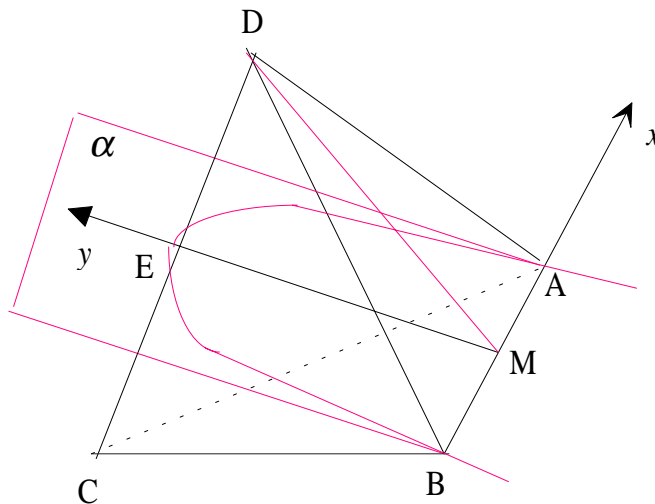
e $\widehat{PH'H}$ in comune

Per cui
$$\frac{BD}{HP} = \frac{DH'}{PH'} \quad \frac{l}{l'} = \frac{\frac{l}{2}\sqrt{3}}{\frac{l}{6}\sqrt{3}} = 3$$

Possiamo quindi affermare che il rapporto fra gli spigoli dei tetraedri, rispettivamente circoscritto ed inscritto alla sfera di centro O e raggio OP, vale 3.

Poiché
$$\frac{V}{V'} = \frac{l^3}{l'^3} \Rightarrow \frac{V}{V'} = 27$$

c)



Ponendo $l = s$ $DE = \frac{s}{2}$ e $DM = \frac{s}{2}\sqrt{3}$

Dal triangolo rettangolo DEM ricaviamo:
$$EM = \sqrt{DM^2 - DE^2} = \sqrt{\frac{3}{4}s^2 - \frac{1}{4}s^2} = \frac{s}{2}\sqrt{2}$$

d) Se assumiamo come assi cartesiani le rette AB ed ME aventi origine in M, avremo:

$$M(0;0); A\left(\frac{s}{2}; 0\right), E\left(0; \frac{s}{2}\sqrt{2}\right)$$

Per cui l'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$ avente vertice in E la possiamo ricavare dal sistema

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 0 \\ \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{s}{2}\sqrt{2} \\ \frac{s^2}{4}a + \frac{s}{2}b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = \frac{s}{2}\sqrt{2} \\ a = -\frac{2\sqrt{2}}{s} \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{2\sqrt{2}}{s}x^2 + \frac{1}{2}s\sqrt{2}$$

e) L'area delimitata dalla parabola e dalla retta EA è data da

$$\begin{aligned} S &= S_{\text{seg parab}} - S_{\triangle MAE} = \frac{2}{3}MA \cdot ME - \frac{1}{2}MA \cdot ME = \frac{1}{6}MA \cdot ME = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{s}{2} \cdot \frac{s}{2} \sqrt{2} = \frac{1}{24}s^2\sqrt{2} \end{aligned}$$

essendo $S = \frac{\sqrt{2}}{3}$, otteniamo

$$\frac{1}{24}s^2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow s = 2\sqrt{2}$$