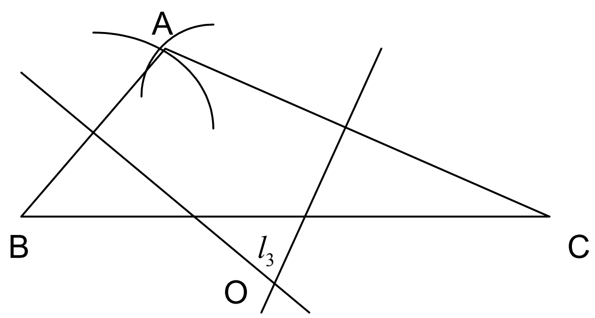
Soluzione del problema 2

Poniamo $l_1 = a + 2x \quad l_2 = a - x \quad l_3 = 2a - x$

a) le lunghezze assegnate sono lati di un triangolo non degenere quando $l_1 - l_2 < l_3$, quindi: $a + 2x - a + x < 2a - x$ da cui si ricava: $x < \frac{a}{2}$.

b) Per determinare l'area del triangolo applichiamo la formula di Erone $A = \sqrt{p(p-l_1)(p-l_2)(p-l_3)}$ e otteniamo: $A = \sqrt{2ax(a-2x)(a+x)}$. Per la ricerca dei massimi e minimi studiamo nell'intervallo $\left]0; \frac{a}{2}\right[$ il segno di $A'(x) = -6x^2 - 2ax + a^2$ e ricaviamo: $6x^2 + 2ax - a^2 \le 0$ per $\frac{-a - a\sqrt{7}}{6} \le x \le \frac{-a + a\sqrt{7}}{6}$. Quindi l'area massima si ha per $x = \frac{-a + a\sqrt{7}}{6} \in \left]0; \frac{a}{2}\right[$.

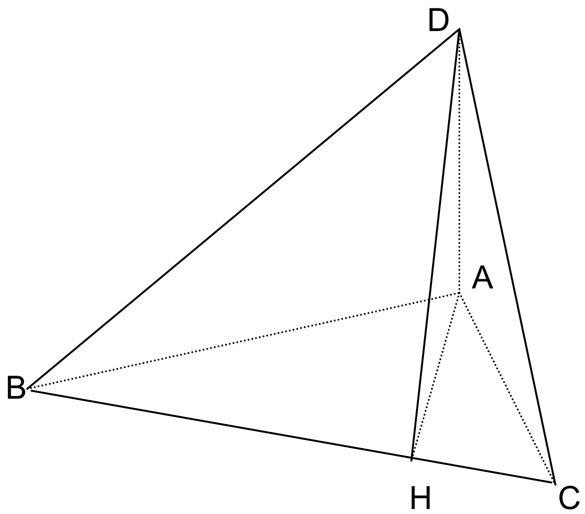
c) Per $x = \frac{a}{4}$ le lunghezze assegnate sono lati di un triangolo non degenere essendo $\frac{a}{4} < \frac{a}{2}$. Per la costruzione geometrica del triangolo ricaviamo dapprima $l_1 = \frac{3}{2}a \quad l_2 = \frac{3}{4}a \quad l_3 = \frac{7}{4}a$ e, posto $a = 4cm$, tracciamo un segmento di lunghezza $l_3 = 7\,cm$



Puntando il compasso in B tracciamo un arco di raggio $l_2 = 3cm$ e, puntando poi il compasso in C tracciamo un arco di raggio $l_1 = 6cm$. Chiamiamo con A il punto comune a i due archi e costruiamo il triangolo ABC.
Per classificare tale triangolo rispetto agli angoli determiniamo il centro O della circonferenza circoscritta mediante gli assi dei lati l_1 e l_2. Poiché 0 è esterno al triangolo, questo è ottusangolo.

Per $x = \frac{a}{4}$ l'area del triangolo è: $A = a^2 \frac{\sqrt{5}}{4}$.

d) Costruiamo adesso il tetraedro BCAD con $\overline{AD} = a$



Per determinare l'angolo formato dai piani ABC e DBC calcoliamo la misura dell'angolo α formato da DH e AH, essendo AH l'altezza di ABC.

Poiché $tg\alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{AH}}$

e $\overline{AH} = \frac{2A}{\overline{BC}} = \frac{2}{7}\sqrt{5}\,a$

si ha: $tg\alpha = \frac{7}{10}\sqrt{5}$ e $\alpha = arctg\frac{7}{10}\sqrt{5} = (57{,}42...)^\circ$.