Problema 1

Essendo k la curva di equazione $f(x) = \frac{x^2+2}{x^3+2}$

a) la curva è situata nel semipiano positivo quando $\frac{x^2+2}{x^3+2} > 0$

ossia per $x > \sqrt[3]{-2}$ mentre appartiene al semipiano negativo per $x < \sqrt[3]{-2}$
Per $x = \sqrt[3]{-2}$ presenta un punto di discontinuità di seconda specie.

b) La parabola γ passante per l'origine ed avente asse di simmetria parallelo a y ha equazione $y = ax^2 + bx$. Poiché $f(-1) = 3$ e $y(-1) = a - b$ si ricava: $a = b + 3$.
Quindi $\gamma : y = (b+3)x^2 + bx$. Inoltre, tenendo conto che la parabola incide ortogonalmente con k in $x = -1$, deve essere: $m \cdot m' = -1$. (1)
Ricaviamo quindi i coefficienti angolari delle rette tangenti t_k e t_γ.

$f'(x) = \frac{x(-x^3-6x+4)}{\left(x^3+2\right)^2}$ $\qquad m_{t_k} = f'(-1) = -11$ $\qquad t_k : y = -11x - 8$

$y'(x) = 2(b+3)x + b$ $\qquad m_{t_\gamma} = y'(-1) = -b - 6$

per la (1) si ha: $-11(-b-6) = -1$ da cui $b = -\frac{67}{11}$

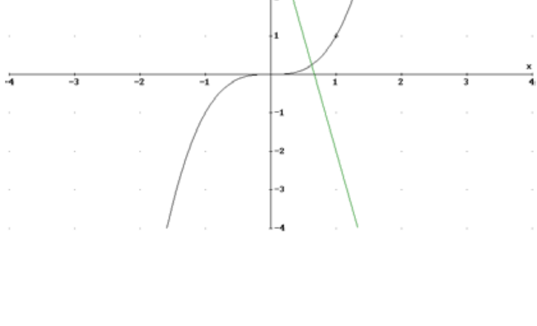
Quindi $\gamma : y = -\frac{34}{11}x^2 - \frac{67}{11}x$

c) per verificare se la retta t_k in $x = -1$ ha altri punti in comune con k si considera il sistema: $\begin{cases} y = -11x - 8 \\ y = \frac{x^2+2}{x^3+2} \end{cases}$ da cui si ricava: $\left(x+1\right)^2(11x^2 - 14x + 18) = 0$

La radice reale è solo $x = -1$ (soluzione doppia), infatti,
l'equazione $11x^2 - 14x + 18 = 0$, avendo $\Delta < 0$, non ha soluzioni reali.

d) la curva k ha per tangente una parallela all'asse x nei punti in cui $f'(x) = 0$ (estremi relativi). Poniamo quindi: $x(-x^3-6x+4) = 0$ da cui $\begin{matrix} x = 0 \\ -x^3 - 6x + 4 = 0 \end{matrix}$ la seconda equazione, dopo aver posto $y = x^3$, si risolve graficamente considerando le curve:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = -6x + 4 \end{cases}$$



Si osserva che il punto di ascissa $x = \alpha \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$ è il punto richiesto.

e) Teorema di Lagrange: se $f(x)$ è una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$ esiste almeno un punto $c \in]a,b[$ in cui $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.
Le condizioni del Teorema di Lagrange non sono soddisfatte perché la $f(x)$ non è continua nell'intervallo $\left[-\sqrt{2},0\right]$ nel punto $x = \sqrt[3]{-2}$ (vedi punto (a)).
Il grafico di k è il seguente