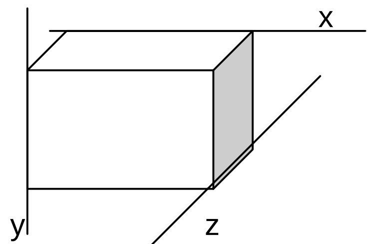
A cura di G. Florio M. Ripoli A. Scimone E. Zanghì

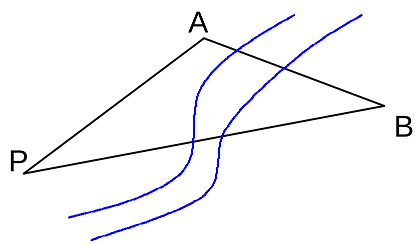
Soluzione dei quesiti

1. due rette si dicono sghembe quando non appartengono allo stesso piano.
   La proprietà è falsa, eccezion fatta per il caso rappresentato in figura



negli altri casi, se x e y sono sghembe e lo sono anche y e z , x e z sono complanari.

2. se il piano è parallelo alla base la sezione è un quadrato, se il piano è parallelo ad uno degli spigoli di base la sezione è un trapezio isoscele, se il piano è parallelo alla diagonale del quadrato di base è un deltoide, in tutti gli altri casi è un quadrilatero convesso.
3.



Misuriamo dapprima la distanza AP, poi, ponendoci rispettivamente in A e in P misuriamo l'angolo $\widehat{PAB}$ e l'angolo $\widehat{APB}$. Essendo $\widehat{PBA} = \pi - (\widehat{PAB} + \widehat{APB})$ possiamo scrivere:

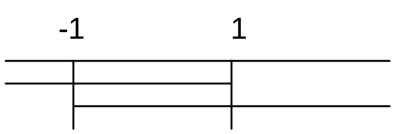
$$\frac{AP}{sen\ \widehat{PBA}} = \frac{AB}{sen\ \widehat{APB}}$$ da cui ricaviamo $$AB = AP\,\frac{sen\widehat{APB}}{sen\ \widehat{PBA}}$$

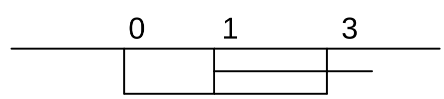
4.

il dominio della funzione si ottiene mediante il sistema: $\begin{cases} x+1 \ge 0 \\ \sqrt{x+1} - (x-1) > 0 \end{cases}$

che equivale a $\begin{cases} x-1 < 0 \\ x+1 \ge 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ x+1 > (x-1)^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x < -1 \\ x \ge -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x \ge 1 \\ 0 < x < 3 \end{cases}$

Quindi:

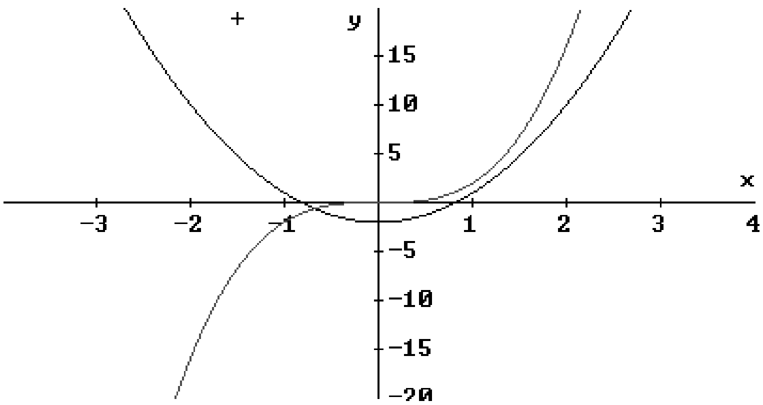




$$-1 \le x < 3$$

5.

risolviamo con il metodo grafico
posto $y = 2x^3$ consideriamo i grafici delle funzioni che compongono il seguente sistema: $\begin{cases} y = 2x^3 \\ y = 3x^2 - 2 \end{cases}$ (cubica + parabola)

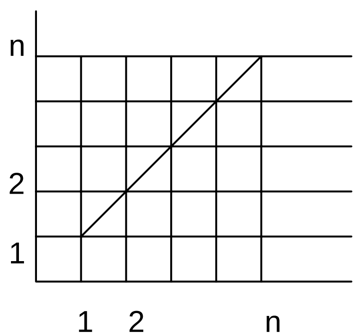


6.

se si pone $g(x) = x^2$ in $f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$ si ha:

$f\left[g(x)\right] = \int_0^{g(x)} e^{-t^2} dt$ da cui $D\ f\left[g(x)\right] = f'\left[g(x)\right] \cdot g'(x) = e^{-[g(x)]^2} g'(x) = 2x\, e^{-x^4}$

7.



si tratta di sommare tutti i prodotti ottenuti mediante le coppie (i,k) $i \le n;\ k \le n$ corrispondenti ai punti del reticolo indicato in figura.

La somma dei prodotti dei termini della prima riga è $S(1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \ldots\ldots + 1 \cdot n = \frac{n(n+1)}{2}$

la somma dei prodotti dei termini della seconda riga è

$S(2) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \ldots\ldots + 2 \cdot n = 2\frac{n(n+1)}{2}$ e procedendo allo stesso modo si ha:

$S(n) = n \cdot 1 + n \cdot 2 + ... + n \cdot n = n\dfrac{n(n+1)}{2}$

Quindi

$S_{i,k} = 1 \cdot \dfrac{n(n+1)}{2} + 2 \cdot \dfrac{n(n+1)}{2} + 3 \cdot \dfrac{n(n+1)}{2} + ... + n\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}(1+2+...+n) = \dfrac{n(n+1)}{2}\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

ricordando che per i=k $S_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\qquad S_{i,k} - S_{i,i} = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} - \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Inoltre, essendo uguali gli elementi simmetrici del reticolo, $a_{i,k} = a_{k,i}$, per escluderli dividiamo la precedente uguaglianza per 2

$$\frac{S_{i,k} - S_{i,i}}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \frac{1}{24}n(n^2-1)(3n+2)$$

8.

$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$ e $x - y = 2$

quindi

$x^3 - y^3 = 2(x^2+xy+y^2)$ (*) è divisibile per 2

Per dimostrare che non è divisibile per 3 poniamo nella (*) $y = x - 2$ e otteniamo

$2\left[x^2 + x(x-2) + (x-2)^2\right] = 2(3x^2 - 6x + 4) = 2\left[3x(x-2)+4\right] = 2(3xy+4)$

poiché $3xy+4$ non è divisibile per 3 la risposta esatta è la B

9.

si tratta di considerare il numero delle combinazioni di tre elementi tra gli 88 numeri che vanno da 2 a 89 per cui $C_{88,3} = \dfrac{D_{88,3}}{3!} = \dfrac{89 \cdot 88 \cdot 87}{6} = 109.736$

10.

l'affermazione è vera infatti $\log_2 3 \cdot \log_3 2 = \log_2 3 \dfrac{\log_2 2}{\log_2 3} = 1$