Quesiti a risposta aperta

1. Data la funzione $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(a-2x) & x\geq 1\\ 2-x^2 & x<1\end{cases}$ determina il valore di a affinché $f(x)$ sia continua in ß, traccia il grafico della funzione e calcola l' $\int_0^2 f(x)\,dx$.
2. Calcola il $\lim_{x\to\infty} 2x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$
3. Determina le equazioni degli asintoti di $f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}$.
4. Determina il dominio e gli estremi relativi della funzione $f(x)=x\,e^{\frac{1}{1+\ln x}}$.
5. Determina il dominio di $f(x)=arcsen\frac{1-x^2}{1+x^2}$.
6. Data la funzione $f(x)=\begin{cases}ax-b & x\geq 1\\ x^2-1\in & x<1\end{cases}$ determina i valori di a e b affinché $f(x)$ sia derivabile in ß, traccia il grafico, calcola l'area della regione di piano R in cui $f(x)\leq R\leq 2$. Determina per quali valori di x la funzione $|f(x)|$ non è derivabile.

Soluzioni dei quesiti 6_02

1. Affinché la funzione risulti continua deve essere:

   $\lim_{x\to 1^-}(2-x^2)=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{2}(a-2x) \quad\Rightarrow\quad 1=\frac{1}{2}(a-2)\Rightarrow\quad a=4$ quindi:

   $f(x)=\begin{cases}2-x^2 & x<1\\ 2-x & x\geq 1\end{cases}$ e $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1(2-x^2)dx+\int_1^2(2-x)dx=\frac{13}{6}$

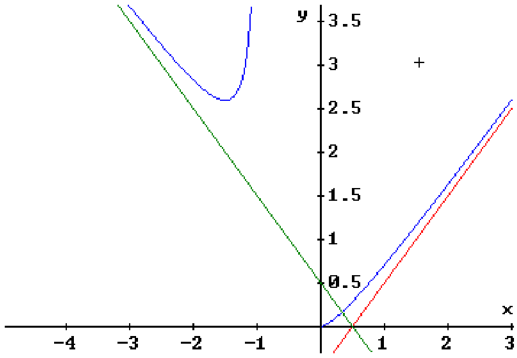
2. Ponendo $e^{\frac{1}{x}}-1=t$ si ha: $\lim_{x\to 0}\frac{2t}{\ln(t+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\frac{1}{t}\ln(t+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)^{\frac{1}{t}}}=\frac{2}{\ln e}=2$

3. $D_f =]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$ Oltre all'asintoto verticale $x=-1$, la funzione possiede due asintoti obliqui; infatti, essendo : $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{|x|}{x}\sqrt{\frac{x}{x+1}}$ $m_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x}\sqrt{\frac{x}{x+1}} = 1$

e $m_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x}{x}\sqrt{\frac{x}{x+1}} = -1$ Inoltre: $q_1 = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{\frac{x}{x+1}} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} - 1\right)$

e razionalizzando si ottiene: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2+x}+x+1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = x - \frac{1}{2}$ In modo analogo

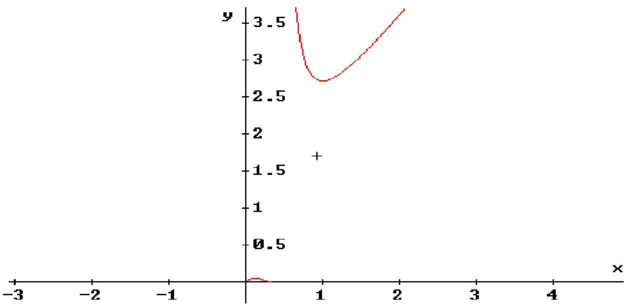
si ha: $q_2 = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{\frac{x}{x+1}} + x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{-\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\right) = \frac{1}{2}$ da cui $y = -x + \frac{1}{2}$



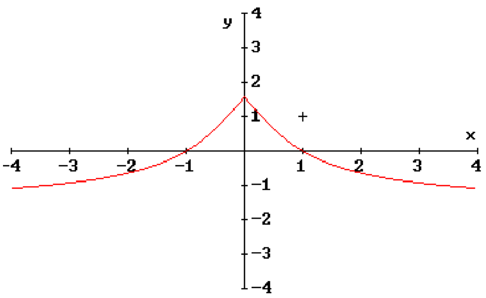
4. la funzione esiste quando: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{e} \end{cases}$ $y' = e^{\frac{1}{1+\ln x}} + x\, e^{\frac{1}{1+\ln x}} \cdot \frac{-\frac{1}{x}}{(1+\ln x)^2}$ che fornisce:

$e^{\frac{1}{1+\ln x}}\left(1 - \frac{1}{(1+\ln x)^2}\right) > 0 \Rightarrow \ln x\,(\ln x + 2) > 0 \Rightarrow x < e^{-2} \vee x > 1$ quindi:

$Max(e^{-2}; e^{-3});\quad \min(1; e)$



5. $-1 \le \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \ge -1 \\ \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \le 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2} > 0 \\ -\dfrac{2x^2}{1+x^2} < 0 \end{cases}$ le due disequazioni sono sempre verificate, quindi: $D_f =$ ß



6. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-1) = \lim\limits_{x\to 1^+}(ax-b) \\ \lim\limits_{x\to 1^-} 2x = \lim\limits_{x\to 1^+} a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ a=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}$ quindi: $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & x<1 \\ 2x-2 & x \ge 1 \end{cases}$

$area = S + A + P = \dfrac{11}{3} + 2\sqrt{3}$

$|f(x)|$ non è derivabile per $x = \pm 1$