Sesta Raccolta del 2003

1. stabilire il numero delle soluzioni dell'equazione: $sen\,2x = x - 1$

2. determinare l'insieme di derivabilità della funzione $y = \sec x + 2\cos x$

3. calcolare l'integrale $\int \frac{2x^2}{\sqrt{4+x^3}}\,dx$

4. calcolare il seguente limite $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{1+x^2}\right)^{2x^2+1}$

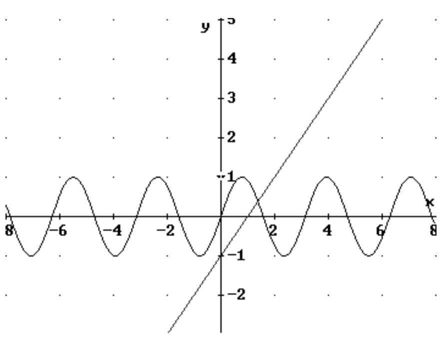
5. calcolare la derivata seconda di $F(x) = \int_0^x \ln\sqrt{x+1}\,dx$

6. determinare le soluzioni della disequazione $e^x \geq 3 - x$

7. come calcolare un limite del tipo $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$

Soluzioni

1. risolviamo il problema graficamente. Se tracciamo i grafici delle funzioni $y = sen\,2x$ e $y = x - 1$ possiamo osservare che essi hanno un solo punto di intersezione. Quindi l'equazione assegnata possiede una sola soluzione.



2. essendo $y = \frac{1}{\cos x} + 2\cos x$ si ha: $y' = \frac{sen\,x}{\cos^2 x} - 2\,sen\,x$ per cui

   $\cos x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

3. ricordando che $\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{1}{n+1}[f(x)]^{n+1} + c$ risolviamo l'integrale assegnato scrivendolo nella seguente forma: $\frac{2}{3}\int \left(4+x^3\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(3x^2\right)dx$ Da cui

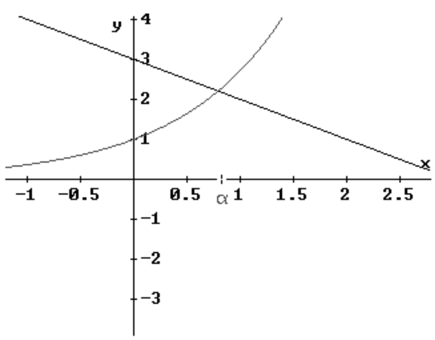
   $$\frac{2}{3}\int \left(4+x^3\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(3x^2\right)dx = \frac{2}{3}\cdot 2\left(4+x^3\right)^{\frac{1}{2}} + c = \frac{4}{3}\sqrt{4+x^3} + c$$

4. poniamo $x^2 + 1 = t \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + 1 = 2t - 1 \quad (x \to \infty \Rightarrow t \to \infty)$ e ricaviamo:

   $$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t-1} = \frac{\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}}{\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)} = e^2$$

5. $F'(x) = \ln\sqrt{x+1}; \quad F''(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ per cui $F''(x) = \frac{1}{2(x+1)}$

6. il problema va risolto graficamente. Dalla rappresentazione grafica delle funzioni: $y = e^x$ e $y = -x+3$



possiamo osservare che la disequazione è verificata per $x \geq \alpha \quad (0,5 < \alpha < 1)$

7. dividendo il numeratore $N(x) = x - 1$ per il denominatore $D(x) = x + 3$ otteniamo il quoziente $q = 1$ e il resto $r = -4$. Poniamo $D(x) = r \cdot t$ ossia $x + 3 = -4\,t$ e calcoliamo

   il $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} = \lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{4}{4t}\right)^{-4t-1} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-4t-1} = \frac{\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-4t}}{\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{1}} = e^{-4}$$