Soluzioni dei quesiti della prima serie 2003

1. la funzione esiste quando $x \neq \pm 1$ per cui $D_f =]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$
2. applicando il teorema di De L'Hospital si ha: $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{1-x}}{1+e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-e^{1-x}}{-e^{-x}} = e$
3. integrando per parti $\int \ln\sqrt{\left|\frac{x+3}{x-3}\right|}\,dx = x\ln\sqrt{\left|\frac{x+3}{x-3}\right|} - \int x\sqrt{\left|\frac{x-3}{x+3}\right|}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\left|\frac{x-3}{x+3}\right|}\cdot\frac{x-3-x-3}{(x-3)^2}\,dx =$

   $= x\cdot\ln\sqrt{\left|\frac{x+3}{x-3}\right|} + \frac{3}{2}\int\frac{2x}{x^2-9}\,dx = x\cdot\ln\sqrt{\left|\frac{x+3}{x-3}\right|} + \frac{3}{2}\ln\left|x^2-9\right| + c$
4. essendo $m = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x}{4x} - \frac{\sqrt{\left|x^2-2\right|}}{x^2}\right) = \frac{1}{4}$ e $q = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x}{4} - \frac{\sqrt{\left|x^2-2\right|}}{x} - \frac{x}{4}\right) = -1$

   l'equazione dell'asintoto obliquo è: $y = \frac{1}{4}x - 1$
5. è derivabile quando $\lim_{x\to2^-}\frac{2x}{4m} = \lim_{x\to2^+} 1 \Rightarrow \frac{1}{m} = 1 \Rightarrow m = 1$
6. la funzione non è integrabile nell'intervallo $[0;3]$ perché non è continua per $x = 1$, infatti $\lim_{x\to1^-}(x+2) \neq \lim_{x\to1^+}(5x-x^2)$
7. poiché $f(x) = x^2 - 4$ *per* $x > 2$ e $f(x) = -x^2 + 4$ *per* $x < 2$ si ha: $f_-'(2) = (-2x)_{x=2} = -4$ e $f_+'(2) = (2x)_{x=2} = 4$ quindi $f_-'(2) \neq f_+'(2)$
8. essendo $f'(x) = \frac{(2x-k)(x^2+1) - 2x(x^2-kx+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{k(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$ $f'(x) > 0$ per

   $x < -1 \vee x > 1$ $\forall k \in \mathbb{R}_0$ Osservando inoltre che $f''(x) = \frac{2kx(x^2+1) - 4x(kx^2-k)(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$

   e $f''(\pm1) \neq 0$, i punti $\left(-1;\frac{2-k}{2}\right)$ $\left(+1;\frac{2-k}{2}\right)$ sono estremi relativi per $f(x)$
9. integrando per parti si ha: $f(x) = \int e^x(x+1)\,dx = e^x(x+1) - \int e^x dx = x\,e^x + c$ ed essendo $f(0) = 1$ possiamo scrivere: $0\cdot e^0 + 1 = c \Rightarrow c = 1$ Quindi $f(x) = x\,e^x + 1$
10. poiché $tg\,\widehat{C} = \frac{3}{4} > 0$ $0 < \widehat{C} < \frac{\pi}{2}$ e $\cos\widehat{C} = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\widehat{C}}} = \frac{4}{5}$

    Quindi $\cos\widehat{A} = \cos\left[\pi - \left(\widehat{B}+\widehat{C}\right)\right] = -\cos\left(\widehat{B}+\widehat{C}\right) = \frac{3}{10} - \frac{2\sqrt{3}}{5} < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \widehat{A} < \pi$