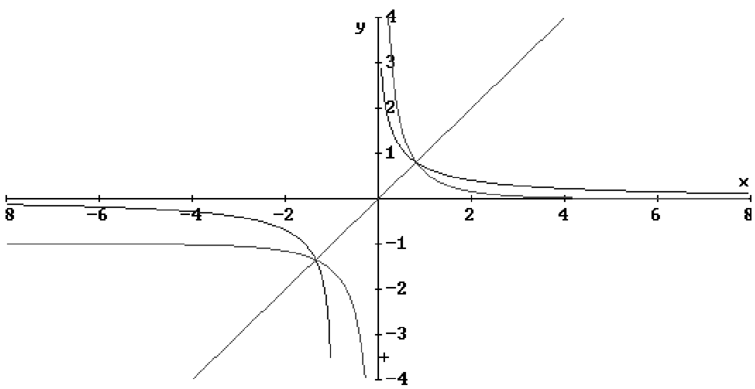
Soluzioni seconda serie 2003

1. la funzione è invertibile nell'intervallo assegnato perché è strettamente decrescente. Infatti $y' = -\frac{e^x}{\left(e^x - 1\right)^2}$ è sempre negativa in $D_f = \left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[$

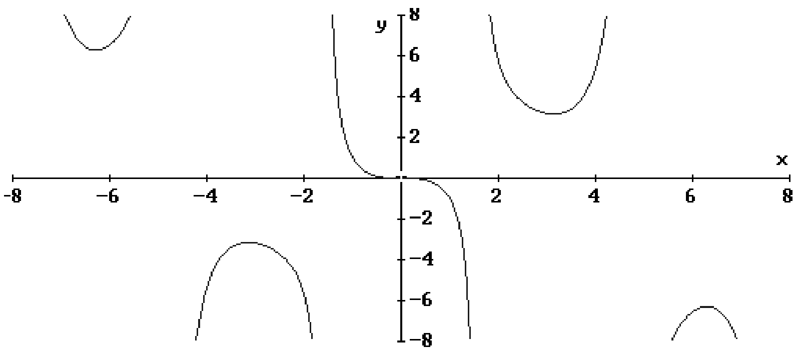
   Da $y = \frac{1}{e^x - 1}$ ricaviamo $e^x = \frac{y+1}{y}$ $x = \ln\frac{y+1}{y}$, quindi: $y = \ln\frac{x+1}{x}$



le curve risultano simmetriche rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

2. la funzione è simmetrica rispetto all'origine perché

$$f(-x) = sen(-x) - \frac{-x}{\cos(-x)} = -\left(sen\,x - \frac{x}{\cos x}\right) = -f(x)$$



3. $$\frac{1}{\frac{1+tg\,\alpha}{1-tg\,\alpha} + \frac{1}{tg\,\alpha}} = sen\,\alpha(\cos\alpha - sen\,\alpha)$$ e, ricordando che:

$$sen\,\alpha = \frac{tg\,\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}};\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}$$ si verifica l'identità

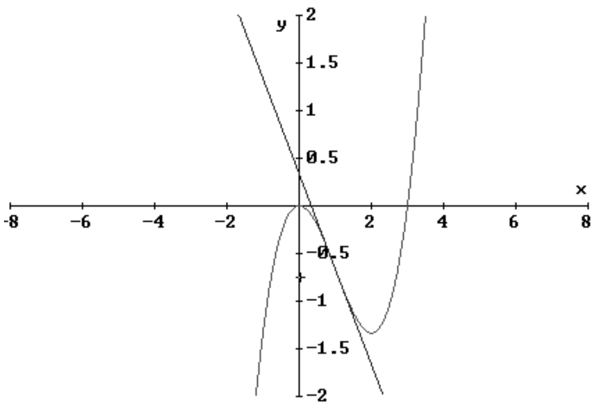
4. $\int_{\sqrt{3}}^{2}(ax^2-x)dx=6$ $\left[a\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{\sqrt{3}}^{2}=6$ $a=\frac{9\left(8+3\sqrt{3}\right)}{37}$

5. $\int\frac{sen\,2x}{sen^3x}dx=\int\frac{\cos x}{sen^2x}dx=-\frac{2}{sen\,x}+c$ ricorda che: $\int\left[f(x)\right]^n f'(x)\,dx=\frac{1}{n+1}\left[f(x)\right]^{n+1}+c$

6. Dopo aver calcolato il punto di flesso della cubica mediante l'annullamento della derivata seconda $y'=x^2-2x$ $y''=2x-2 \Rightarrow x=1$ ed il coefficiente della

retta tangente in tale punto $m=f'(1)=-1$, essendo $y=-\frac{2}{3}$ possiamo

scrivere: $t:\ y+\frac{2}{3}=-(x-1) \Leftrightarrow 3x+3y-1=0.$



7. poniamo $e^{\frac{1}{x}}-1=t$ e ricaviamo $\frac{1}{x}=\ln(t+1)$ $x=\frac{1}{\ln(t+1)}$ poiché

per $x\to+\infty$ $t\to 0$ possiamo scrivere:

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(t+1)}{t}}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\ln(t+1)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{\ln e}=1$$