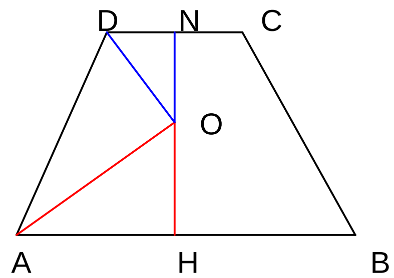
Soluzioni della terza serie 2003

1.



Essendo $tg\ \widehat{OAH} = \frac{\overline{OH}}{\overline{AH}} = \frac{r}{r\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\widehat{OAH} = \widehat{DAO} = 30°$ e

$\widehat{ADO} = \widehat{ODN} = 60°$. Quindi $\overline{DN} = \overline{ON} \cdot ctg\ \widehat{ODN} = r\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\overline{CD} = 2r\frac{\sqrt{3}}{3}$

Poiché $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$ $2p = 2\left(2r\sqrt{3} + 2r\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{16}{3}\sqrt{3}\,r$

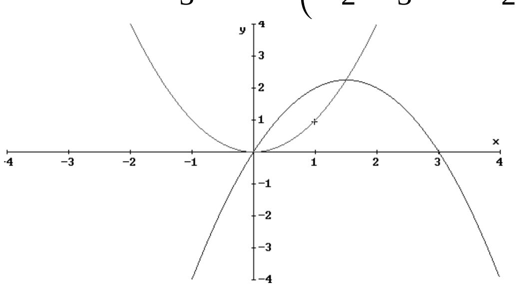
2. Se poniamo $a_1 = x,\quad a_2 = y \quad \Rightarrow \quad q = \frac{y}{x}$ e $a_3 = \frac{y}{x} \cdot y$

$$\begin{cases} x + y = 36 \\ \frac{y^2}{x} - y = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a_1 = 12 \\ y = a_2 = 24 \end{cases} \quad a_3 = 48$$

3. Ricordando che le disposizioni semplici di n elementi presi a k a k sono date da: $D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot .... \cdot (n-k+1)$, le disposizioni semplici di 9 cifre prese a tre a tre sono: $D_{9,3} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$

4. $$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} x^2 dx + \lim_{\delta \to 0} \int_{1+\delta}^{3} (3x - x^2) dx =$$

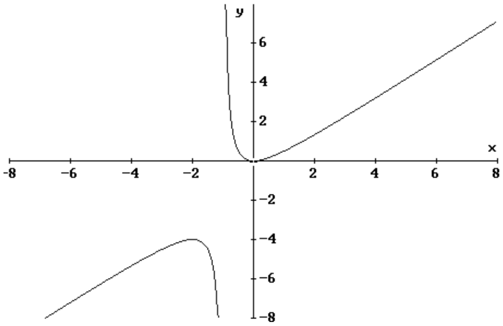
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(1-\varepsilon)^3}{3} + \lim_{\delta \to 0}\left(3\frac{3^2}{2} - \frac{3^3}{3} - 3\frac{(1+\delta)^2}{2} + \frac{(1+\delta)^3}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{27}{2} - 9 - \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$$



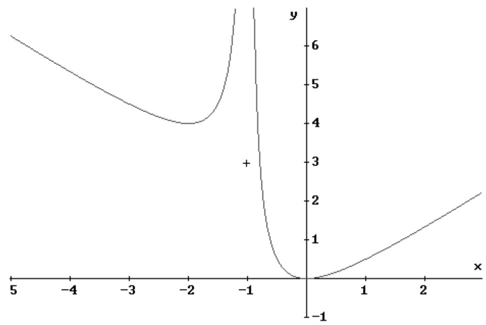
5. Studiamo $y = \dfrac{x^2}{x+1}$ $D = \mathbb{R} - \{-1\}$; $y > 0$ per $x > -1$; asintoto verticale $x = -1$;

asintoto obliquo $m = \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ $q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = -1$ $\Rightarrow y = x - 1$

$y' = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$ $y' > 0$ *per* $x < -2 \vee x > 0$



quindi, il grafico di $y = |f(x)|$ è



6. Integrando per parti

$$\int e^{-2x} \cos\frac{x}{2} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} \cos\frac{x}{2} - \int \left(-\frac{1}{2} e^{-2x}\right)\left(-\frac{1}{2} sen\, x\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2x} \cos\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2} e^{-2x} sen\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\int e^{-2x} \cos\frac{x}{2} dx\right) = -\frac{1}{2} e^{-2x} \cos\frac{x}{2} + \frac{1}{8} e^{-2x} sen\frac{x}{2} - \frac{1}{16}\int e^{-2x} \cos\frac{x}{2} dx.$$

quindi $\int e^{-2x} \cos\frac{x}{2} dx = \frac{8}{17} e^{-2x} \left(\frac{1}{4} sen\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)$

7. Poiché $V\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$ le equazioni parametriche del luogo sono:

$$\begin{cases} x = k + 1 \\ y = \dfrac{4(3k+1) - 4(k+1)^2}{4} \end{cases}$$

ricavando il parametro k dalla prima e sostituendo nella seconda si ottiene: $y = -x^2 + 3x - 2$

che è l'equazione di una parabola