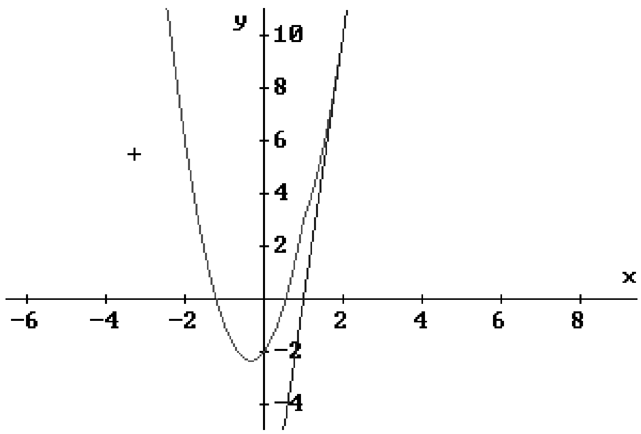
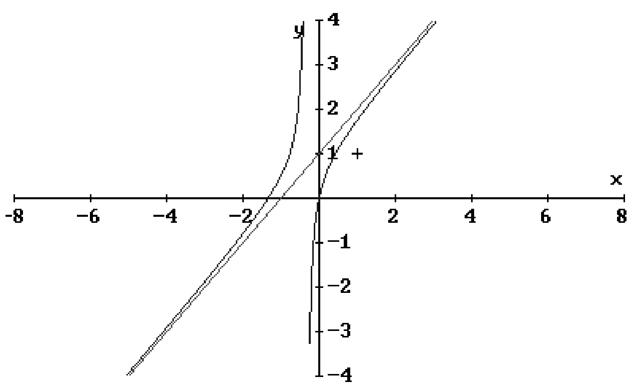
Soluzioni della quarta serie del 2003

1. Per $x>1$ l'equazione della funzione è: $f(x)=3x^2-2(x-1)$; $f(2)=8$; $f'(x)=6x-2$ e $f'(2)=10$, quindi $y-8=10(x-2)$ è l'equazione della tangente.



2. Ricordiamo che una funzione è simmetrica rispetto al punto $P(x_0;y_0)$ se la sua equazione non varia quando si effettua la sostituzione: $x'=2x_0-x \quad e \quad y'=2y_0-y$.
   Per dimostrare che Q è il centro di simmetria effettuiamo la sostituzione:
   $x'=6-x \quad e \quad y'=-2-y$ e otteniamo: $-2-y=(6-x)^3-9(6-x)^2+27(6-x)-28$
   da cui $y=x^3-9x^2+27x-28$ che è la funzione data.

3. Poiché la differenza tra il grado del numeratore e quello del denominatore è 1, per determinare l'equazione dell'asintoto obliquo calcoliamo il quoziente della divisione: $\left(ax^2+bx\right):(3x+1)$ e otteniamo: $q(x)=\frac{1}{3}a\,x+\frac{1}{3}b-\frac{1}{9}a$ Confrontando $q(x)$ con l'equazione dell'asintoto $y=x+1$ si ricava: $\begin{cases}\frac{1}{3}a=1\\ \frac{1}{3}b-\frac{1}{9}a=1\end{cases}$ $\begin{cases}a=3\\ b=4\end{cases}$ $f(x)=\frac{3x^2+4x}{3x+1}$



4. $m_{AB} = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \sqrt{3}$ $\quad m_{AC} = \dfrac{2}{2} = 1$ quindi:

$$tg\,\alpha = \frac{m - m'}{1 + mm'} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} \quad \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{12}$$

5. Poiché la funzione è strettamente crescente per $x > 0$ essa è invertibile. Essendo $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x}{1+x^2}$ la derivata della funzione inversa nel punto corrispondente a $x = 2$ sarà: $\dfrac{1}{f'(2)} = \dfrac{1+2^2}{2} = \dfrac{5}{2}$

6. La funzione deve essere simmetrica rispetto all'origine. E perché lo sia devono essere nulli i termini di grado pari e il termine noto. Quindi:

$$\begin{cases} a+1=0 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow a=-1; \quad b=0$$

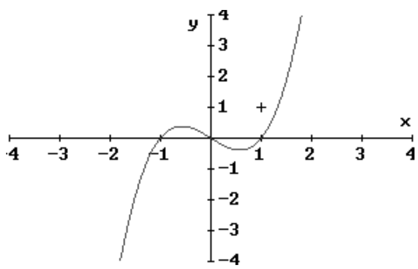


Grafico di $y = x^3 - x$

7. Posto $y = k - 2$ risolviamo graficamente il sistema $\begin{cases} y = k-2 \\ y = x^3 - 2x^2 \end{cases}$ la prima rappresenta un fascio di rette parallele all'asse x, la seconda è una cubica passante per l'origine, avente un massimo relativo per $x = 0$ e un minimo relativo per $x = \dfrac{4}{3}$ Poiché $y\left(\dfrac{4}{3}\right) = -\dfrac{32}{27}$ e $y(0) = 0$ l'equazione ha tre soluzioni per

$$-\frac{32}{27} \le k - 2 \le 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{22}{27} \le k \le 2$$