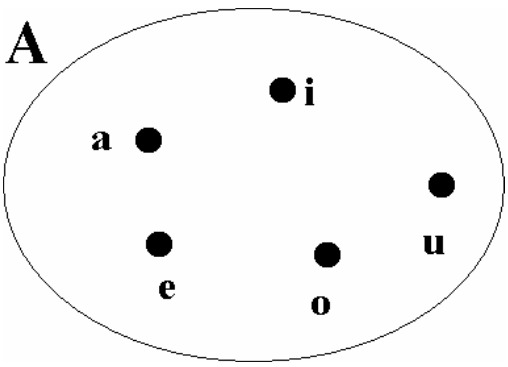
Teoria degli insiemi

Il concetto di insieme si assume come primitivo, cioè non riconducibile a concetti precedentemente definiti. Sinonimi di insieme sono: collezione, aggregato, classe, ecc..
E' importante che esista un criterio atto a stabilire in modo univoco se un elemento appartiene o no all'insieme.
Ad esempio l'insieme delle vocali dell'alfabeto latino è un insieme, mentre l'insieme dei libri divertenti non è un insieme perché il criterio per stabilire se un libro è divertente o meno è soggettivo.
Gli insiemi vengono indicati con lettere latine maiuscole A, B, C,….
Gli oggetti che compongono un insieme prendono il nome di elementi e vengono indicati con lettere latine minuscole : a, b, c,…
Per indicare che un elemento a appartiene all'insieme A si scrive:
$a \in A$
Il simbolo $\in$ deriva dal latino est e prende il nome di simbolo di appartenenza, mentre $\notin$ è il simbolo di non appartenenza.
Un insieme privo di elementi prende il nome di insieme vuoto e si denota con il simbolo $\varnothing$.

Rappresentazione di un insieme

Nella teoria degli insiemi vengono usati tre modi per rappresentare un insieme:
1. Rappresentazione tabulare: consiste nell'elencare tutti gli elementi dell'insieme che vengono inclusi in parentesi graffe. Es. $A = \{a; e; i; o; u\}$
2. Rappresentazione mediante i grafici di Eulero-Venn: consiste nel rappresentare un insieme mediante una linea chiusa del piano, all'interno della quale gli elementi vengono indicati con dei punti e con delle lettere a fianco di essi. Questi diagrammi o grafici prendono il nome di diagrammi di Eulero-Venn.



3 Rappresentazione mediante una proprietà caratteristica: L'insieme viene assegnato mediante una proprietà di cui godono tutti gli elementi dell'insieme. Es. $A = \{x : x \text{ è una vocale dell'alfabeto latino}\}$ Il simbolo :viene letto "tale che".

Sottoinsiemi

Dati due insiemi A e B, si dice che B è sottoinsieme di A se ogni elemento di B è anche elemento di A e si indica

$B \subseteq A$

Si legge anche B è contenuto o è incluso in A.

Def.: Due insiemi A e B si dicono uguali se sono formati con gli stessi elementi

$A = B$

ovvero ogni elemento dell'uno è anche elemento dell'altro (non ha importanza l'ordine con cui vengono descritti gli insiemi)

$A = B \Leftrightarrow [x \in A \Leftrightarrow x \in B]$ ovvero $A = B \Leftrightarrow [A \subseteq B \wedge B \subseteq A]$

Es. $\{a;b;c;d\} = \{b;c;a;d\}$

Si dice che B è un sottoinsieme proprio di A

$B \subset A$

se $B \subseteq A$ e se esiste almeno un elemento di A che non sia elemento di B ($A \neq B$)

$[\forall x \in B \Rightarrow x \in A \, e \, \exists y \in A : y \notin B]$

Es. $A = \{a;e;i;o;u\}$ $B = \{a;o;u\}$

L'insieme vuoto viene considerato come sottoinsieme di ogni insieme, e fra i sottoinsiemi di A si considera A stesso, per cui ogni insieme non vuoto A possiede due sottoinsiemi: se stesso e l'insieme vuoto, che prendono il nome di sottoinsiemi banali.

Per evitare contraddizioni logiche considereremo gli insiemi come sottoinsiemi di un insieme detto insieme universale o ambiente, che è un insieme tale da contenere come sottoinsiemi tutti gli insiemi che ci interessano.

Insieme delle parti

Assegnato un insieme A, consideriamo tutti i sottoinsiemi che si possono formare con gli elementi di A. Chiamiamo insieme delle parti di A e lo indichiamo con $P(A)$ l'insieme i cui elementi sono tutti i sottoinsiemi di A.

Esempio: $A = \{a;b;c\}$ Si ha

$P(A) = \{\emptyset;\{a\};\{b\};\{c\};\{a;b\}\{a;c\}\{b;c\}\{a;b;c\}\}$

Se l'insieme A è formato da n elementi, l'insieme delle parti $P(A)$ è formato da 2^n elementi

Dim. : Ogni sottoinsieme di A è formato da k elementi di A dove

$0 \leq k \leq n$

Abbiamo quindi tanti sottoinsiemi di A con k elementi quante sono le combinazioni di n oggetti a k a k, cioè $\binom{n}{k}$

Il numero N di elementi di P(A) sarà

$$N = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Applicando la formula del binomio di Newton avremo

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

ponendo $a=1, b=1$ avremo

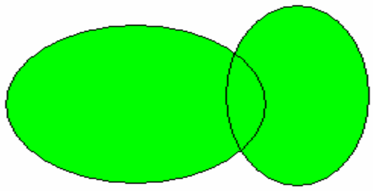
$$N = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \cdot 1^{n-k} = 2^n$$

Operazioni sugli insiemi

Unione di insiemi

Dati due insiemi A e B definiamo unione di A e B l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad A o a B o a entrambi e lo denotiamo con $A \cup B$.

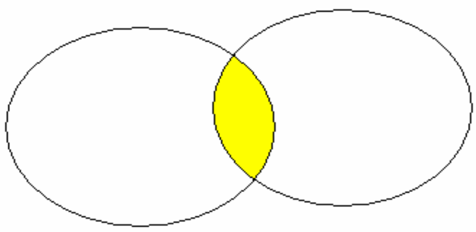
$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$



Intersezione di insiemi

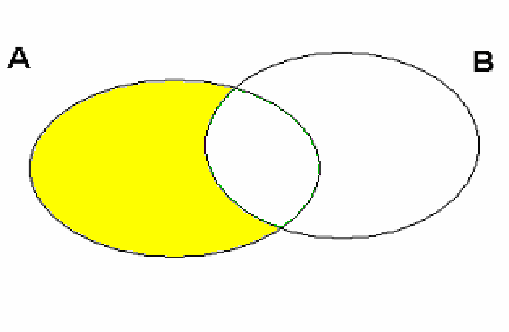
Dati due insiemi A e B definiamo intersezione di A e B l'insieme formato dagli elementi che appartengono sia ad A, sia a B. Si ha:

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$



Differenza di insiemi

Dati due insiemi A e B, si dice differenza fra A e B l'insieme formato dagli elementi di A che non appartengono a B



$A \setminus B = A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

Insieme complementare

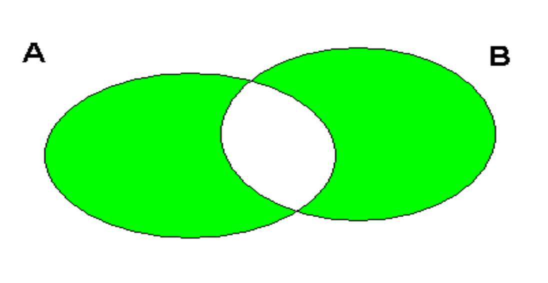
Sia S un insieme qualunque ed A un suo sottoinsieme $A \subseteq S$. Si dice complementare di A in S e si indica con $\complement_S A$ od anche $\overline{A}$, l'insieme degli elementi di S che non appartengono ad A. Si ha anche

$\complement_S A = S \setminus A$

Differenza simmetrica

Supponiamo che A e B siano sottoinsiemi di S. Siano $\overline{A}$ e $\overline{B}$ i loro complementari. Si ha:

$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$



Pertanto: La differenza simmetrica è l'insieme degli elementi di A che non appartengono a B e l'insieme degli elementi di B che non appartengono ad A.

Proprietà formali delle operazioni tra insiemi

$A \cup A = A$ infatti $A \cup A = \{x : x \in A \vee x \in A\} = \{x : x \in A\} = A$ idempotenza dell'unione

$A \cap A = A$ idempotenza dell'intersezione

$A \cup \emptyset = A$ è evidente perché l'insieme vuoto è sottoinsieme di qualsiasi insieme

$A \cap \emptyset = \emptyset$ è conseguenza del fatto che $A \cap \emptyset \subseteq A \subseteq A \cup \emptyset$ e $A \cap \emptyset \subseteq \emptyset \subseteq A \cup \emptyset$

proprietà commutativa

$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$

Si può dimostrare usando tabelle simili alle tabelle di verità.

A	B	$A \cup B$	$B \cup A$	$A \cap B$	$B \cap A$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

Proprietà associativa

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

A	B	C	$B \cup C$	$A \cup (B \cup C)$	$A \cup B$	$(A \cup B) \cup C$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

A	B	C	$B \cap C$	$A \cap (B \cap C)$	$A \cap B$	$(A \cap B) \cap C$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

Proprietà distributive dell'intersezione rispetto all'unione , sia a destra che a sinistra

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Proprietà distributive dell'unione rispetto all'intersezione, sia a destra che a sinistra

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Si ha inoltre

$A \setminus A = \varnothing$
$A \setminus \varnothing = A$
$\overline{\overline{B}} = B$
$B \cap \overline{B} = \varnothing$
$B \cup \overline{B} = U$

Leggi di De Morgan

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Prodotto cartesiano

Dati due insiemi A e B non vuoti, definiamo prodotto cartesiano di A e B (nell'ordine) l'insieme delle coppie ordinate (a,b) con $a \in A$; $b \in B$; cioè

$A \times B = \{(a;b) : a \in A \wedge b \in B\}$

Se $A \neq B$

$A \times B \neq B \times A$

cioè il prodotto cartesiano non gode della proprietà commutativa.

Se $A = B$ $A \times A$ è un insieme diverso da A (perché è formato dalle coppie ordinate degli elementi di A). Si ha

$A \times A = A^2$

Se $A = \varnothing$ o $B = \varnothing$ non è possibile formare alcuna coppia in quanto l'insieme vuoto è privo di elementi. S ha quindi:

$A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$
$\varnothing \times \varnothing = \varnothing$

Proprietà distributiva del prodotto cartesiano rispetto all'unione (a sinistra e a destra)

Assegnati gli insiemi A, B, C avremo

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

Dim.

$[(a;b) \in A \times (B \cup C)] \Rightarrow [a \in A; b \in B \cup C] \Rightarrow [a \in A; b \in B \text{ oppure } a \in A; b \in C] \Rightarrow$

$\Rightarrow [(a;b) \in A \times B \text{ oppure } (a;b) \in A \times C] \Rightarrow [(a;b) \in (A \times B) \cup (A \times C)]$

Inversamente avremo

$$[(a;b)\in(A\times B)\cup(A\times C)]\Rightarrow[(a;b)\in A\times B \text{ oppure } (a;b)\in A\times C]\Rightarrow$$
$$[a\in A; b\in B \text{ oppure } a\in A; b\in C]\Rightarrow[a\in A; b\in B\ o\ C]\Rightarrow$$
$$\Rightarrow[a\in A; b\in B\cup C]\Rightarrow[(a;b)\in A\times(B\cup C)]$$

Proprietà distributiva del prodotto cartesiano rispetto all'intersezione (a sinistra e a destra)

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

Avremo:

$$[(a;b)\in A\times(B\cap C)]\Rightarrow[a\in A; b\in B\cap C]\Rightarrow[a\in A; b\in B\wedge C]\Rightarrow$$
$$\Rightarrow[(a;b)\in A\times B\wedge(a;b)\in A\times C]\Rightarrow[(a;b)\in(A\times B)\cap A\times C]$$

Inversamente

$$[(a;b)\in(A\times B)\cap(A\times C)]\Rightarrow[(a;b)\in A\times B\wedge(a;b)\in A\times C]\Rightarrow$$
$$\Rightarrow[a\in A; b\in B\wedge a\in A; b\in C]\Rightarrow[a\in A; b\in B\cap C]\Rightarrow[(a;b)\in A\times(B\cap C)]$$

Relazioni tra insiemi

Dati due insiemi non vuoti A e B dicesi relazione binaria una proprietà $\Re$ tale che per ogni coppia $(x;y)$ del prodotto cartesiano $A\times B$ sia vera una ed una sola delle due affermazioni:

a) la coppia ordinata $(x;y)$ soddisfa la proprietà $\Re$ $x\Re y$

b) la coppia ordinata $(x;y)$ non soddisfa la proprietà $\Re$ $x\not\Re y$

La relazione prende il nome di binaria perché è definita fra la coppia $(x;y)$ con $x\in A$ e $y\in B$

Il sottoinsieme di A sul quale è definita la relazione $\Re$ prende il nome di dominio della relazione.

L'insieme degli elementi corrispondenti in B prende il nome di codominio della relazione.

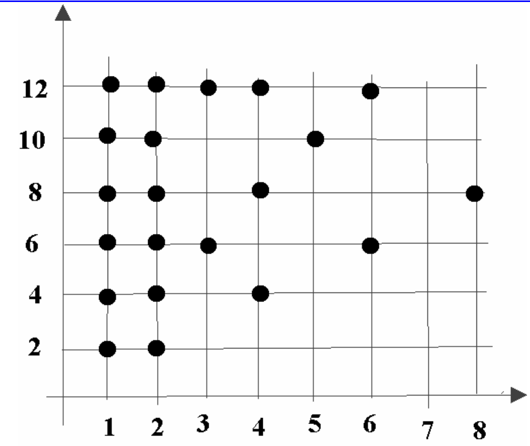
Pertanto una relazione è un sottoinsieme del prodotto cartesiano perché la relazione è il sottoinsieme costituito da tutte e sole le coppie ordinate che verificano la condizione. Possiamo quindi dire che: Una relazione binaria fra A e B è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A\times B$.

Esempio:

Sia $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ $B=\{2,4,6,8,10,12\}$

E sia $a\Re b\Leftrightarrow$ a è un divisore di b

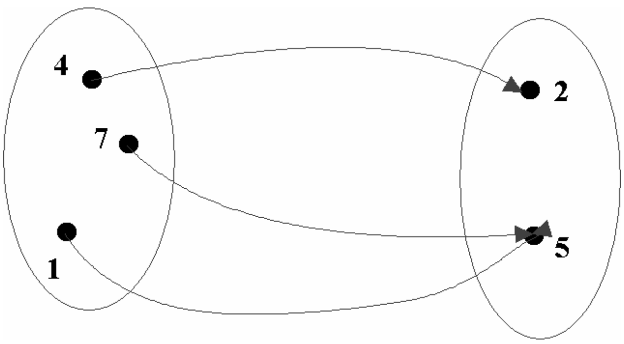
Il grafico sarà il sottoinsieme di $A\times B$ formato dai punti segnati con il pallino



$(5,10) \Rightarrow 5\Re 10$ perché $5|10$

Esempio

$x\Re y = x + y$ è un numero pari



Se $A = B$ avremo una relazione binaria su A.

Proprietà di una relazione

Sia $\Re$ una relazione sull'insieme A.

La relazione è:

riflessiva se:

$\forall a \in A; (a,a) \in \Re$ ovvero $a\Re a$

simmetrica se:

$\forall a,b \in A; (a,b) \in \Re \Rightarrow (b,a) \in \Re$ ovvero $a\Re b \Rightarrow b\Re a$

transitiva se:

$\forall a,b,c \in A; \left[(a,b) \in \Re \; e \; (b,c) \in \Re\right] \Rightarrow (a,c) \in \Re$ ovvero $a\Re b \wedge b\Re c \Rightarrow a\Re c$

antisimmetrica se:

$\forall a,b \in A; \left[(a,b) \in \Re \wedge (b,a) \in \Re\right] \Rightarrow a = b$ ovvero $a\Re b \wedge b\Re a \Rightarrow a = b$

Relazione di equivalenza

Sia $\Re$ una relazione definita in un insieme A.
La relazione $\Re$ è chiamata relazione di equivalenza se gode delle tre proprietà: riflessiva, simmetrica e transitiva:

1. $\forall a \in A \quad a\Re a$ riflessiva
2. $\forall a,b \in A \quad a\Re b \Rightarrow b\Re a$ simmetrica
3. $\forall a,b,c \in A \quad (a\Re b \wedge b\Re c) \Rightarrow a\Re c$ transitiva

Una relazione di equivalenza spesso si indica con il simbolo $\sim$ o $\equiv$

Partizione di un insieme Insieme quoziente

Definizione: Assegnato un insieme A, si dice partizione di A una famiglia F di sottoinsiemi non vuoti di A tale che:

1. nessun sottoinsieme di F è vuoto
2. a due a due i sottoinsiemi di F sono disgiunti (due insiemi si dicono disgiunti se la loro intersezione è l'insieme vuoto)
3. l'unione dei sottoinsiemi di G dà l'insieme A

Pertanto assegnata una partizione di A ogni elemento appartiene ad uno e un solo sottinsieme di F
Sa assegnata tra gli elementi di un insieme A una relazione di equivalenza ε .

Definizione: Dato un $x \in A$ si dice classe di equivalenza X l'insieme degli elementi $x' \in A$ tali che $x'\varepsilon x$, cioè

$$X = \{x' : x'\varepsilon x\}$$

Inoltre se X è una classe di equivalenza un qualunque elemento x basta per individuare la classe X che pertanto potrà essere scritta con $[x]$ e quindi

$[x] = X$. Si ha $x\varepsilon x' \Rightarrow [x] = [x'] = X$ per cui se x e x' sono equivalenti rappresentano la stessa classe

Teorema: Data in A una relazione di equivalenza ε, le classi di equivalenza determinano una partizione di A. Inversamente assegnata in A una partizione e la relazione ε, se x e x' appartengono allo stesso sottoinsieme è una relazione di equivalenza.

Definizione: Si dice insieme quoziente di A rispetto alla relazione ε l'insieme delle classi di equivalenza (cioè l'insieme i cui elementi sono le classi di equivalenza) determinate da ε nell'insieme A e si indica con $A/_{\varepsilon}$.

Esempio: relazione di parallelismo.
Premettiamo la seguente definizione. Due rette del piano si dicono parallele se non hanno alcun punto in comune o se coincidono.
La relazione di parallelismo è una relazione di equivalenza. Essa gode delle proprietà:

1. riflessiva $r // r$
2. simmetrica $r // s \Rightarrow s // r$

3. transitiva $(r // s \wedge s // t) \Rightarrow r // t$

Per cui possiamo effettuare una partizione in classi di equivalenza. Ciascuna classe sarà quindi una direzione (dove per direzione intendiamo una classe di rette parallele).

Relazione d'ordine

Sia A un insieme ed $\Re$ una relazione su A.

Si dice che $\Re$ è una relazione d'ordine (parziale) se:
1. $\Re$ è riflessiva $a \Re a$
2. $\Re$ è antisimmetrica $a \Re b \wedge b \Re a \Rightarrow a = b$
3. $\Re$ è transitiva $a \Re b \wedge b \Re c \Rightarrow a \Re c$

Se la relazione vale $\forall a, b \in A$ l'insieme si dice totalmente ordinato.
In generale una relazione d'ordine viene indicata con $\leq$.
Definizione: Una relazione d'ordine prende il nome di relazione d'ordine stretto se gode delle proprietà:
1. transitiva $\forall x, y, z \in A \quad x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$
2. tricotomia $\forall x, y \in A$ si verifica una ed una sola delle relazioni $x = y \qquad x < y \qquad y < x$

Applicazioni o funzioni

Definizione: Dati due insiemi A e B definiamo applicazione o funzione f di A in B una legge che associa ad ogni elemento x dell'insieme A uno e un solo elemento y dell'insieme B. Si ha:

$f : A \longrightarrow B$ o $A \xrightarrow{f} B$

e si legge "applicazione f di A in B.
Il dominio della corrispondenza è tutto l'insieme A; l'immagine di ogni elemento di A è un solo elemento di B $y = f(x)$; l'immagine di f che verrà indicata con imf è un sottoinsieme di B che si chiama anche codominio di f.

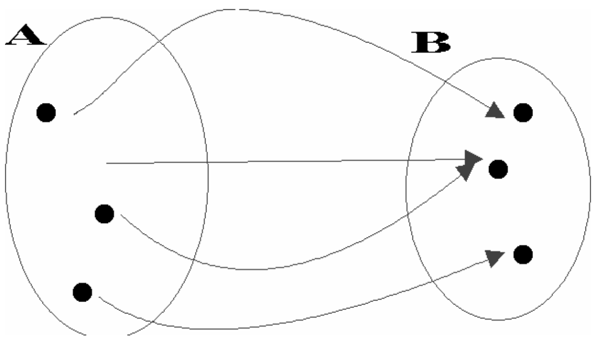
$\operatorname{Im} f = \{ y \in B : \exists x \in A : y = f(x) \}$

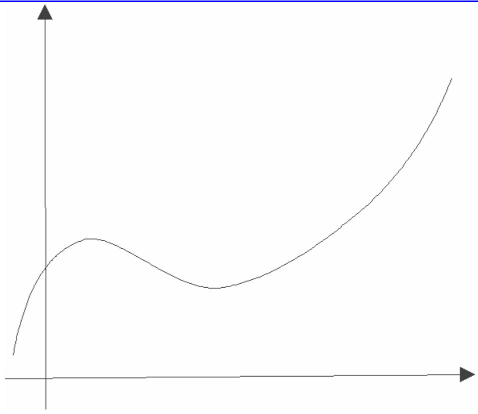
(non si può escludere che a più elementi di A corrisponda lo stesso elemento in B)

Funzioni suriettive

Una funzione $f : A \longrightarrow B$ si dice suriettiva o applicazione di A su B se ogni elemento di B immagine di almeno un elemento di A.

$f(A) = B$ o $\forall y \in B \exists x \in A : f(x) = y$

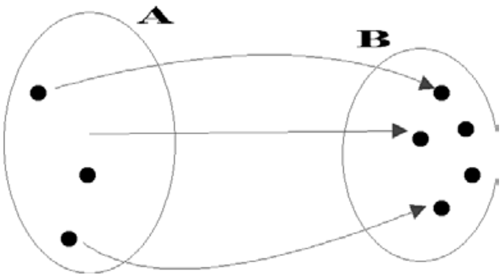


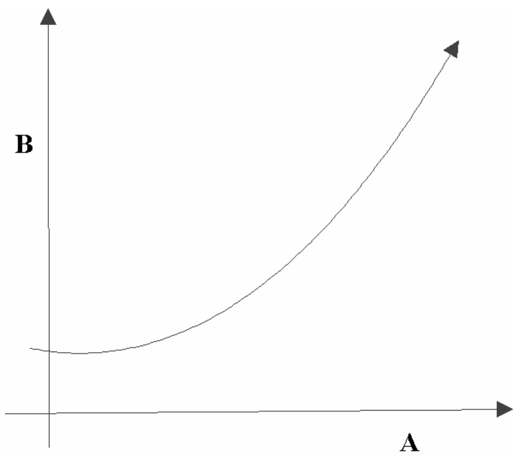


Funzioni iniettive

Si dice che $f : A \longrightarrow B$ è iniettiva se ad elementi distinti $x \in A$ corrispondono elementi distinti $y \in B$, cioè

$$\forall y \in \operatorname{Im} f \Rightarrow \exists! x \in A : y = f(x)$$





Funzioni biunivoche

Una funzione $f : A \longrightarrow B$ si dice biiettiva o biunivoca se è contemporaneamente iniettiva e suriettiva.
Risulta:

$$f(A) = B \quad \text{e} \quad \forall x, x' \in A \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

ovvero:

$$\forall y \in B \Rightarrow \exists! x \in A : y = f(x)$$

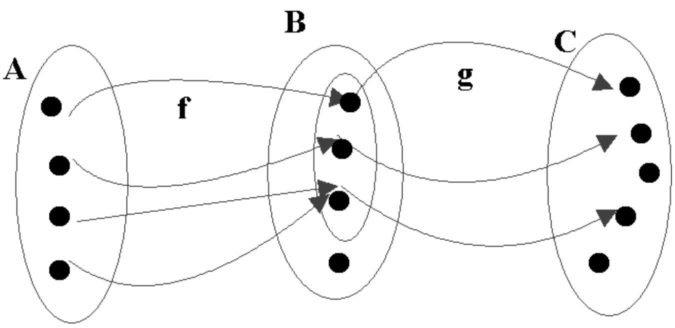
Funzioni composte

Date le funzioni $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ si dice che la funzione $\varphi : A \longrightarrow C$ è funzione composta delle due funzioni f e g se esiste una legge f che fa corrispondere ad ogni elemento $x \in A$ uno e un solo $y \in B$ ed una legge g che fa corrispondere ad ogni $y \in f(A)$ uno e un solo $z \in C$.
Avremo quindi:

$z = \varphi(x)$ e quindi $z = g[f(x)]$

ovvero:

$\varphi = g \circ f$ dove $\varphi = g \circ f(x) = g[f(x)]$



Funzioni inverse

Se $f : A \longrightarrow B$ è una funzione biunivoca. Possiamo definire la funzione inversa di f $f^{-1} : B \longrightarrow A$ nel seguente modo. Assegnato un elemento $y \in B$ si ha che $f^{-1}(y)$ è l'unico elemento $x \in A : y = f(x)$ $x \in A$

Se $f : A \longrightarrow B$ non è biunivoca la funzione inversa di f non può essere definita.

Se $f : A \longrightarrow B$ non è suriettiva $\exists y \in B$ per il quale non esistono elementi $x \in A : y = f(x)$, mentre se $f : A \longrightarrow B$ non è iniettiva esistono elementi $y \in B$ che sono immagini di diversi $x \in A$