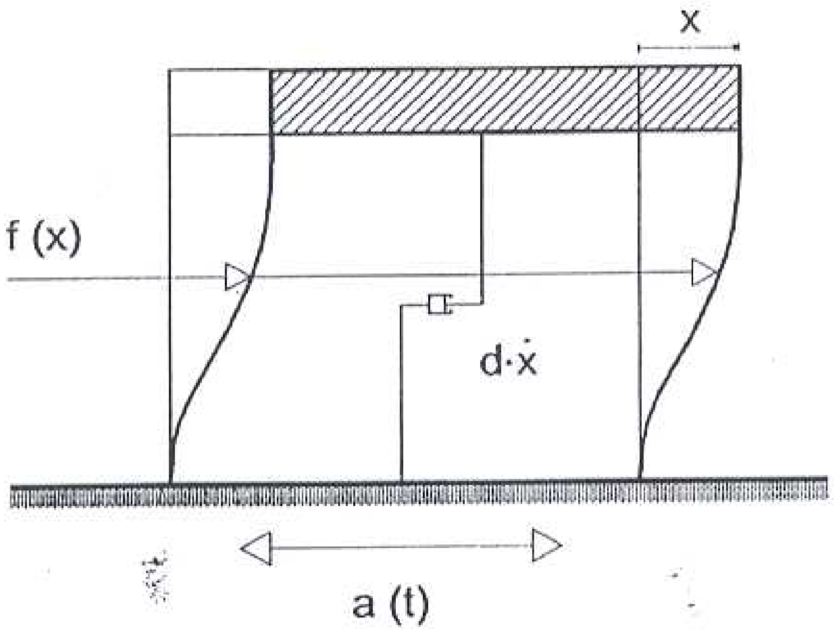
L'oscillatore semplice

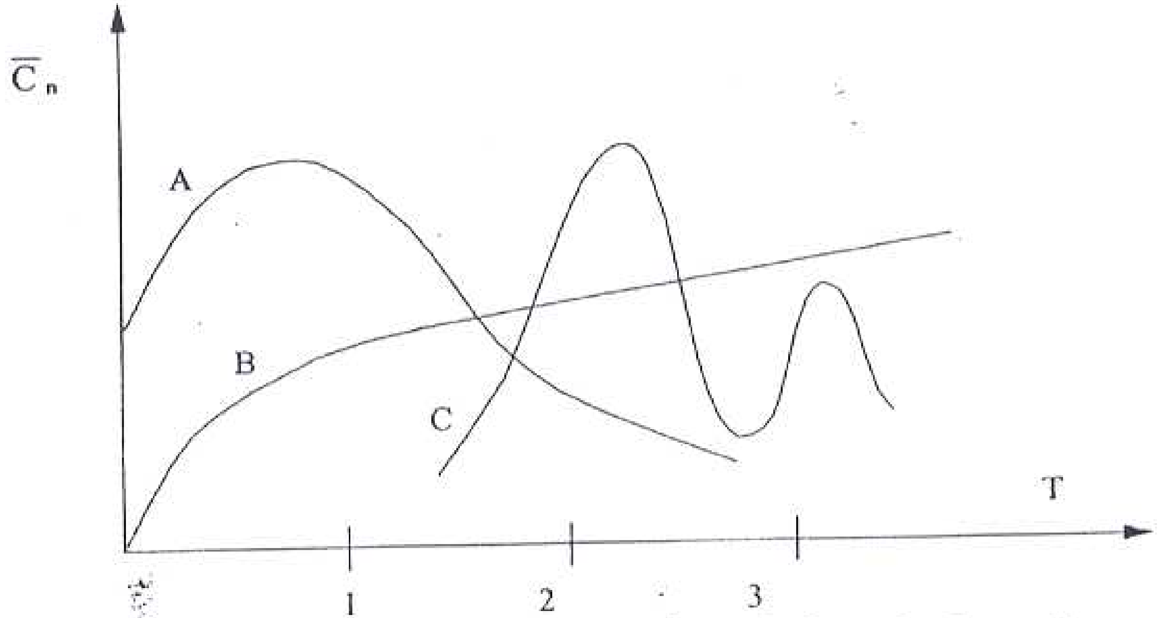


Periodo proprio

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$m\ddot{x} + d\,\dot{x} + f(x) = m \cdot a \cdot \sum_{1}^{N} {}_{n}\overline{C}_{n} \cdot \cos(\omega_{n} t - \varphi_{n})$$

Spettri di Fourier di eventi sismici differenti



- A: su roccia, vicino (componenti fra 0.3 e 1 sec)
- B: terreno compatto, lontano (alte frequenze smorzate)
- C: terreni soffici, selezione delle armoniche

Intensità di a(t)

- Potenza media del sisma

$$W = \frac{1}{D}\int_0^D a^2(t)dt \qquad W = \frac{1}{2}\sum_1^N {}_nC_n^2$$

- Intensità

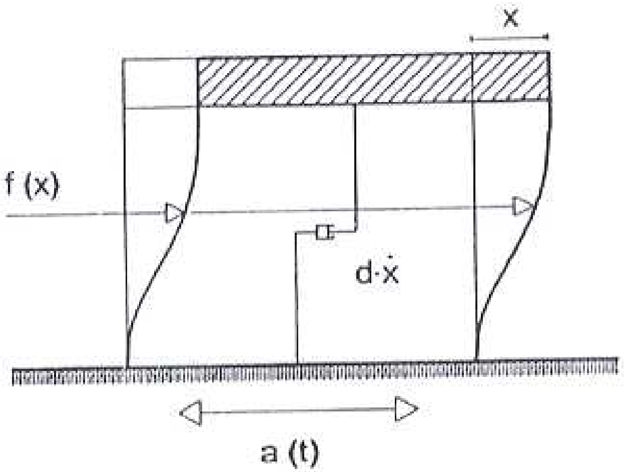
$$I = \sqrt{W} \qquad I = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_1^N {}_nC_n^2}$$

- Il contributo di ogni armonica è $\frac{1}{2}C_n^2$

Lo spettro di risposta

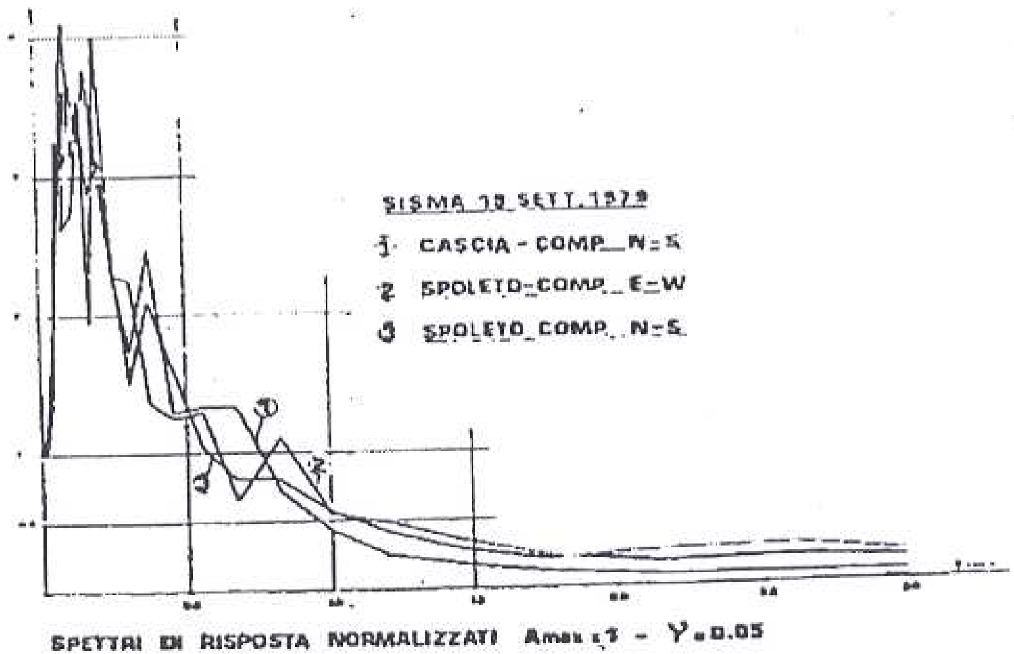
- E' l'insieme dei punti che rappresentano **la risposta massima di un oscillatore semplice sotto un dato accelerogramma, al variare del suo periodo T e per un dato smorzamento**
- La risposta può essere:
  - in accelerazione
  - in velocità
  - in spostamento

Lo spettro di risposta di un accelerogramma



Della storia dinamica si conserva solo il valore massimo

$$F_{max} = M \cdot S_a\left(\overline{T}\right)$$



OSCILLATORE ELEMENTARE (Oscillazioni libere)

EQUAZIONE DEL MOTO : $M\frac{dx^2}{dt^2}+C\frac{dx}{dt}+Kx=0$

Definizioni : **M = massa, C = smorzamento viscoso, K = rigidezza**

Posizioni : $\omega^2 = K/M$, $2\zeta\omega = C/M$

con ω= *velocità angolare* e ζ= *coefficiente di smorzamento*

EQUAZIONE DEL MOTO : $\frac{dx^2}{dt^2}+2\zeta\omega\frac{dx}{dt}+\omega^2 x=0$

$$x = e^{pt} \Rightarrow p^2 + 2\zeta\omega p + \omega^2 = 0 \Rightarrow p_{1,2} = \omega(-\zeta \pm (\zeta^2 - 1)^{0,5})$$

***SOLUZIONE* :** $x = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$

A_1 ed A_2 costanti d'integrazione calcolate per : $x(t=0)$, $\frac{dx}{dt}(t=0)$

DISCUSSIONE

$$\zeta \leq 1 \qquad \Rightarrow p_{1,2} = \omega(-\zeta \pm i(1-\zeta^2)^{0,5})$$

$$x = e^{-\zeta\omega t}(A_1 e^{i\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega t} + A_2 e^{-i\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega t})$$

Ponendo:

$\omega_D = \omega\sqrt{1-\zeta^2}$,

T = **Periodo proprio** = $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $T_D = \frac{2\pi}{\omega_D}$,

ν= **Frequenza** $= \nu = \frac{1}{T}$ $\nu_D = \frac{1}{T_D}$

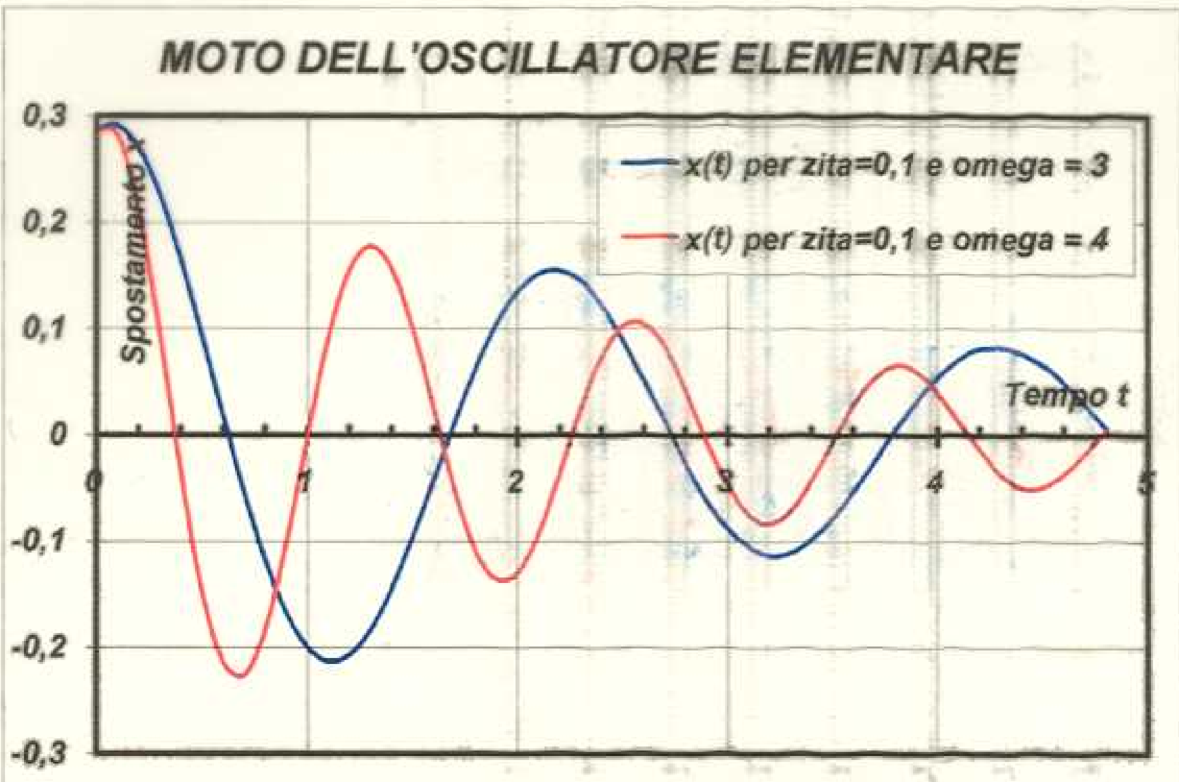
Le costanti di integrazione diventano:

$$a = \textbf{ampiezza} = \left[x(t=0)^2 + \left(\frac{\frac{dx}{dt}(t=0) + \zeta\omega x(t=0)}{\omega_D} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\varphi = \textbf{angolo di fase} = \tan^{-1}\left[\frac{\omega}{\omega_D}\zeta + \left(\frac{\frac{dx}{dt}(t=0)}{\omega_D x(t=0)} \right) \right]$$

SOLUZIONE :

$$x(t) = a e^{-\zeta\omega t} \cos(\omega_D t - \varphi)$$



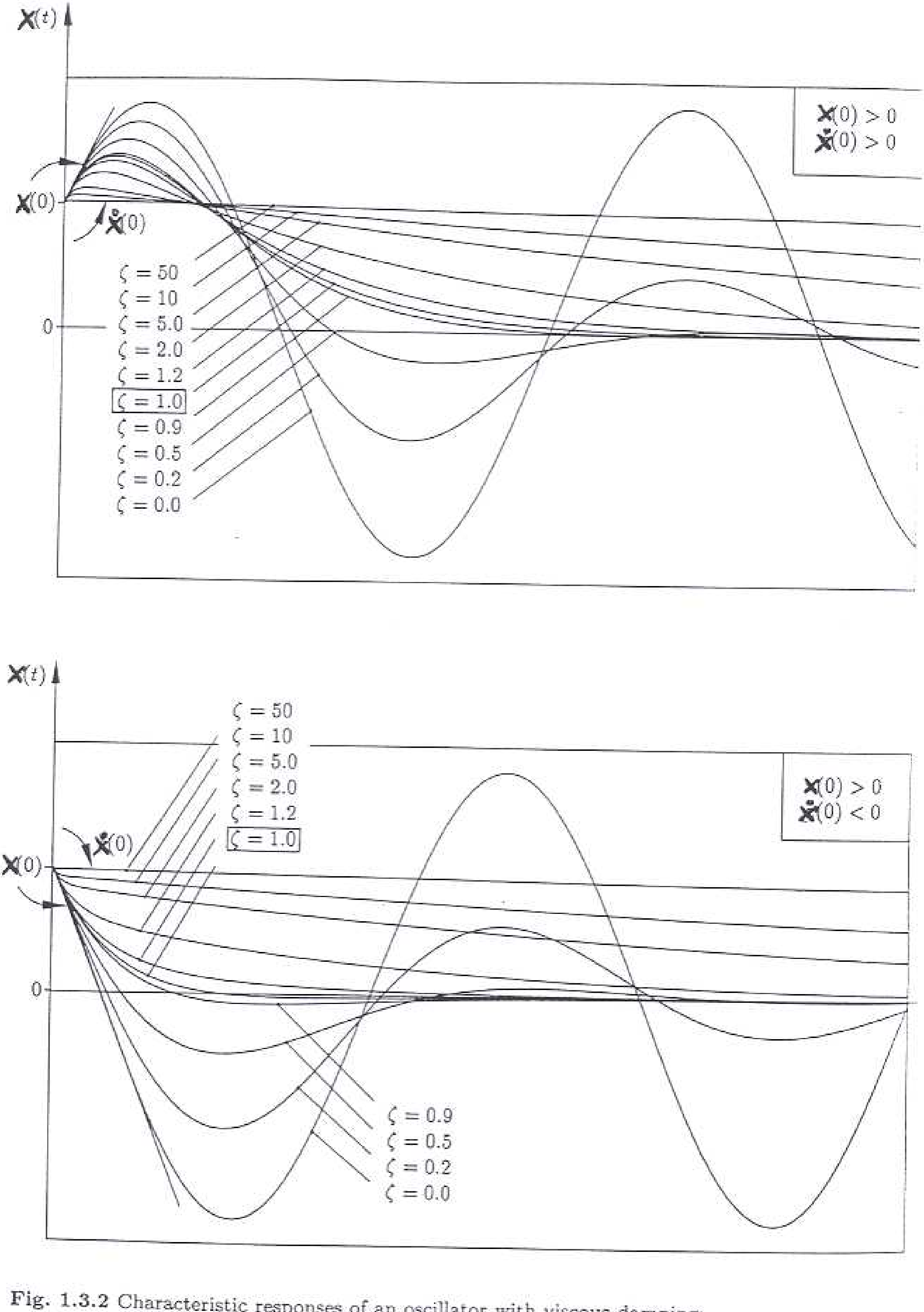


Fig. 1.3.2 Characteristic responses of an oscillator with viscous damping;
Part 1: sub-critical, critical, over-critical damping

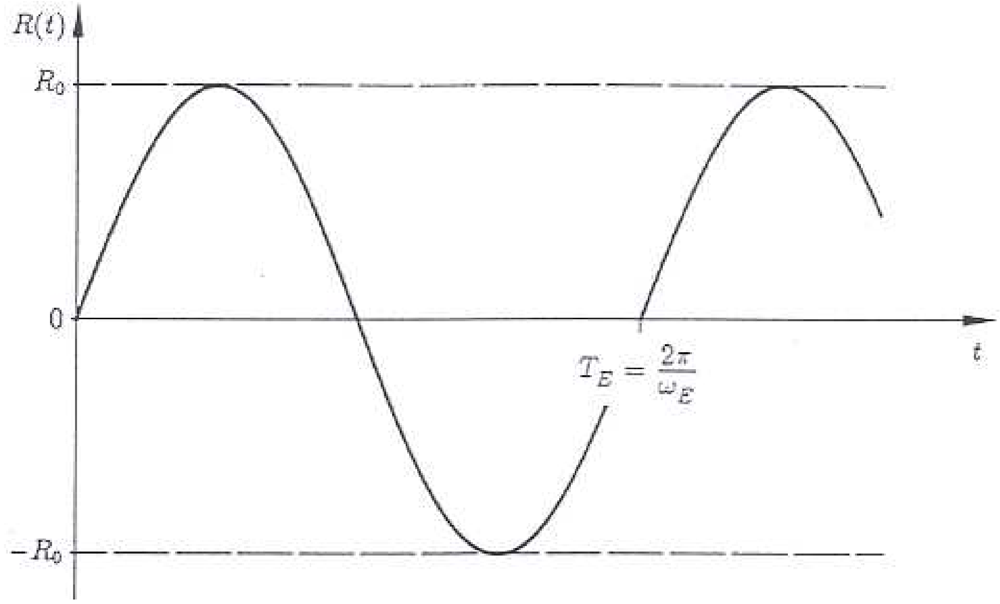


Fig. 1.4.1 Harmonic force excitation

Thus, for extremely slow oscillations, we would obtain a maximum deflection of $\pm x_0$. We now seek a particular solution x_p for

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = \omega^2 x_0 \sin\omega_E t \tag{1.4.5}$$

and assume that

$$x_p(t) = a_p \sin\omega_E t + b_p \cos\omega_E t \tag{1.4.6}$$

Substituting this expression into equ. (1.4.5) and comparing coefficients, we obtain upon introduction of the frequency ratio

$$\beta = \frac{\omega_E}{\omega} \tag{1.4.7}$$

two linear simultaneous equations for the constants a_p and b_p

$$\begin{bmatrix} 1-\beta^2 & -2\zeta\beta \\ 2\zeta\beta & 1-\beta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_p \\ b_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.4.8}$$

Their solution yields

$$a_p = \frac{1-\beta^2}{(2\zeta\beta)^2 + (1-\beta^2)^2} r_0$$

$$b_p = \frac{-2\zeta\beta}{(2\zeta\beta)^2 + (1-\beta^2)^2} r_0 \tag{1.4.9}$$

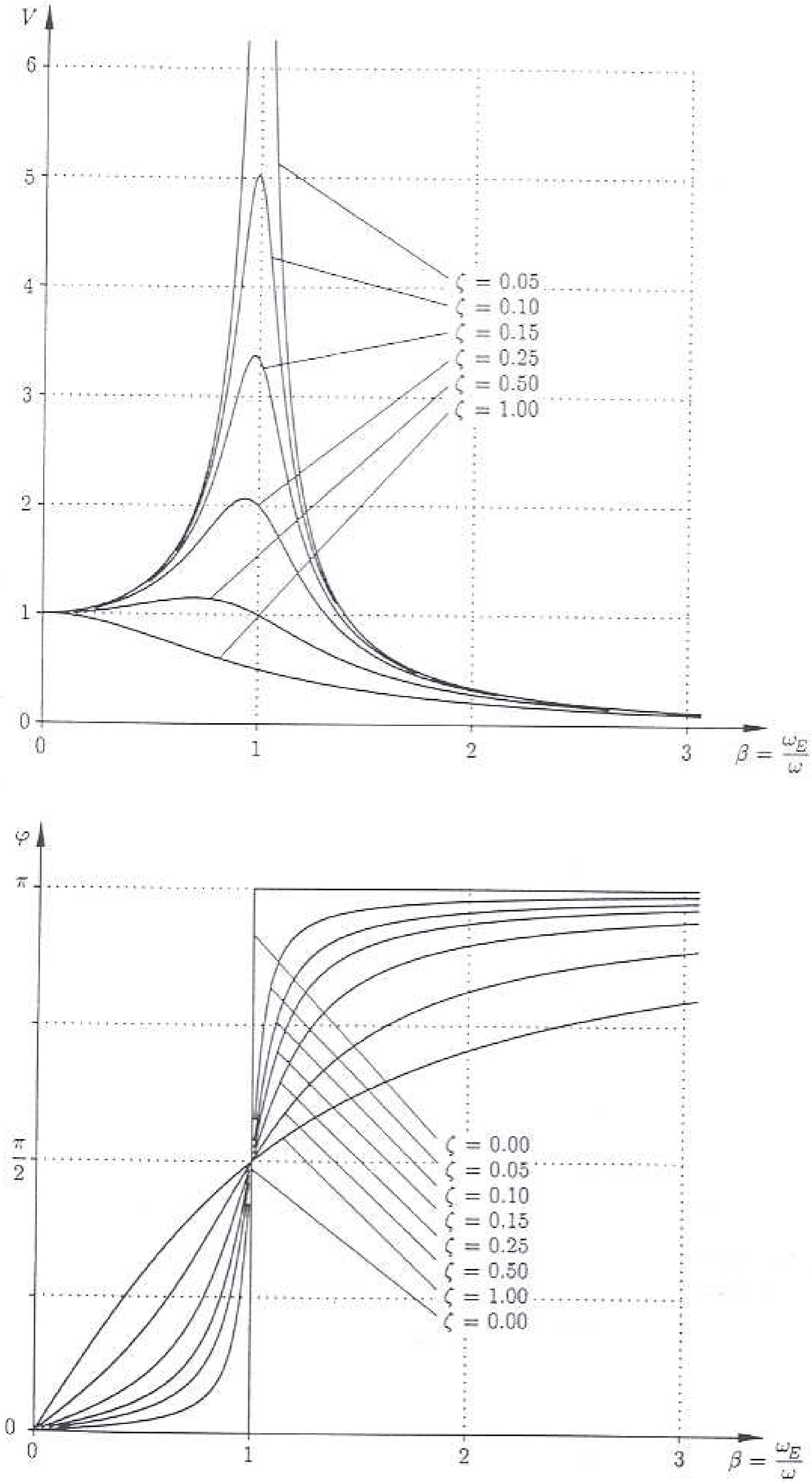


Fig. 1.4.2 Amplification factor and phase angle for the steady-state response of a harmonically excited system with viscous damping