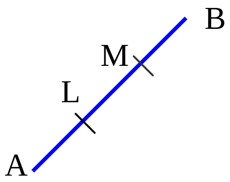
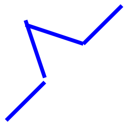
La geometria frattale

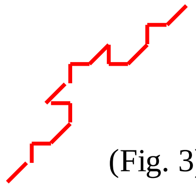
Le radici matematiche dei frattali risiedono nell'opera di uno dei massimi matematici del secolo scorso: Henry Poincaré (1854-1912). Nei suoi "Derniers pensée" egli si oppone, per quel che riguarda i fondamenti della geometria, agli sviluppi della teoria cantoriana degli insiemi. Poincaré sostiene che ogni concetto matematico per essere accettabile deve essere definito facendo riferimento solo a strutture create precedentemente.
Un **oggetto frattale**, così viene chiamato da **Mandelbrot** nella sua prima trattazione ("Les objects. Fractales" del 1975), è un particolare "oggetto" della geometria, di forma irregolare, interrotta, generato, il più delle volte, da un processo casuale.
Secondo Mandelbrot la geometria euclidea non è adatta a descrivere le forme naturali. Essa è "fredda", "statica", "incapace di descrivere la forma di una nuvola o di una montagna, di una costa ("How long is the coast of Britain?") o di un albero". La geometria dei frattali è invece "viva", dinamica. Si adatta meglio allo studio delle strutture naturali microscopiche e macroscopiche, sia inorganiche che biologiche.
Con essa è stato possibile migliorare la comprensione dei processi di formazione e trasformazione delle strutture naturali, nelle quali è possibile riscontrare una particolare forma di simmetria: "l'autosomoglianza" ("self similarity"). Ritroviamo, infatti, i frattali nella fisica, nella botanica, nella genetica e nella tecnologia delle comunicazioni.
Il ritrovare l'intero insieme di Mandelbrot in piccoli particolari dell'insieme stesso dà l'impressione di soddisfare un'antica esigenza di fisici e filosofi, quella di cogliere l'universalità nella diversità.
Per creare un frattale basta stabilire una regola matematica (algoritmo) e applicarla svariate volte. Si riesce così a generare una varietà illimitata di forme sempre più complesse ma tutte autosomiglianti E' facile intuire che il computer è il mezzo più adatto per generare rapidamente e con facilità queste forme. Una volta stabilita la regola il computer elabora le istruzioni programmate e crea un'infinità di immagini. Esse sono spesso frastagliate e irregolari, molto simili alle strutture naturali. Tutto ciò ci induce a pensare che la complessità dell'universo non è altro che l'applicazione reiterata di semplici regole naturali.
La geometria dei frattali, unitamente al computer, ha quindi aperto nuovi metodi matematici, accessibili a tutti, per la creazione dinamica di forme.
Alcuni esempi di strutture geometriche autosomiglianti sono i triangoli di Sierpinski e l'isola di Koch (vedi fig.)
Per capire il concetto di "**dimensione frattale**" è bene descrivere brevemente ciò che Mandelbrot introduce nel suo famoso saggio: "*La curva a fiocco di neve di Koch*". Egli la introduce a proposito di uno studio sulla reale natura geografica del contorno di un'isola. Per questo motivo tale curva viene anche denominata "Isola di Koch".
Per costruire la curva si divide un segmento AB in tre parti uguali e si sostituisce alla parte centrale una cuspide formata da due segmenti ciascuno dei quali ha lunghezza pari ad 1/3 del segmento AB. Ripetendo questo processo operativo infinite volte si perviene alla.



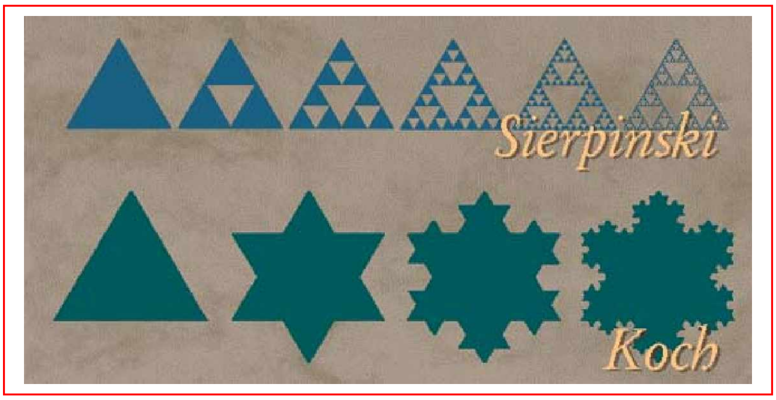
(Fig. 1)



(Fig.2)



(Fig. 3)



La prima serie si ottiene unendo i punti medi di un triangolo equilatero ed asportando il triangolo centrale.
E' facile osservare che ripetendo questi procedimenti si ottengono forme geometriche autosomiglianti, dove il "tutto" assomiglia alla "parte".
Mandelbrot generalizza il concetto di omotetia identificando come figure omotetiche anche quelle che si ottengono mediante altri tipi di trasformazioni (ad es. le isometrie).
Egli giunge alla conclusione che un oggetto è autosomigliante quando lo si può pensare generato da un numero finito di oggetti che non sono altro che l'oggetto stesso ridotto di un certo rapporto di omotetia. Egli usa il termine di **omotetia statistica,** nella quale non conta che le copie dell'oggetto siano identiche ma che presentino la stessa forma e le stesse proprietà. Mandelbrot dopo vari calcoli arriva a determinare la dimensione di un oggetto frattale mediante la formula:

$$d = -\log_K n$$

dove $K = \frac{1}{r}$ è un numero che esprime quante volte più piccolo è l'oggetto ottenuto rispetto a quello originale su cui è stata effettuata un'omotetia di ordine K; mentre n indica il numero delle immagini che si sono ottenute mediante la trasformazione.
Egli applica questa formula per determinare la dimensione della curva di Koch.
La trasformazione applicata al segmento AB (oggetto iniziale) conduce alla creazione del segmento LM (oggetto ottenuto) che risulta rimpicciolito rispetto all'originale di 1/3.
Poiché ogni iterazione fa aumentare la lunghezza della curva portandola a 4/3 della dimensione originale, ad ogni passo vengono generati 4 segmenti immagini di quello iniziale. Si ha quindi:

$$d = -\log_{1/3} 4 = -\frac{\log 4}{\log \frac{1}{3}} = \frac{\log 4}{\log 3} = \log_3 4 = 1{,}2619$$

La dimensione così calcolata vine definita da Mandelbrot “dimensione frattale”.
La curva di Koch, pur avendo dimensione ordinaria 1, ha in realtà dimensione frattale 1.2619.
La geometria frattale ha lo quindi scopo di dare un modello interpretativo di fenomeni il cui studio è stato inaccessibile per il troppo “disordine e caos” che vi regnava.
La parola frattale deriva dal latino “fractus”, che significa interrotto, irregolare, aggettivi che ben si adattano agli oggetti frattali.
Un altro esempio citato da Mandelbrot per la spiegazione dei suoi oggetti frattali, è quello dell’insieme di Cantor. Esso è simile a quello di Koch perché si ottiene mediante l’asportazione dell’elemento centrale senza rimpiazzarlo con alcunché. Tale insieme sarà quindi formato da linee sempre più piccole fino ad arrivare al limite cioè al punto. Mandelbrot ribattezza tale insieme “polvere di Cantor” (in generale polvere in geometria frattale indica insiemi aventi dimensione frattale compresa tra 0 ed 1). Ragionando come precedentemente fatto con la figura di Koch, possiamo calcolare la dimensione dell’insieme di Cantor. Anche in questo caso il rapporto di omotetia che genera l’insieme è 1/3, mentre le immagini che vengono generate ad ogni iterazione sono 2. Si ha dunque:

$$d = -\log_{1/3} 2 = \log_3 2 = 0{,}6309$$

Per meglio comprendere i caratteri che differenziano la geometria classica da quella frattale facciamo le seguenti considerazioni:
---Data la curva γ e scelto su di essa un punto O (origine) possiamo associare ad ogni punto P di γ un valore numerico che ne esprime la distanza da O. (dimensione 1)
---Se consideriamo i punti del piano cartesiano, possiamo associare ad ognuno di essi una coppia ordinata di valori che rappresentano le coordinate del punto. (dimensione 2)
---Anche tra i punti dello spazio tridimensionale e le terne ordinate di valori numerici esiste una corrispondenza biunivoca (dimensione 3)
E’ quindi evidente che, mentre nella geometria classica al concetto di dimensione è associata una dimensione intera, nella geometria frattale una qualunque curva ha dimensione frattale.